

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

**Materiały pomocnicze do wykładu
(Mechanika I Budowa Maszyn)**

PWSZ w Elblągu

Dr hab. inż. Cezary Orlikowski

Instytut Politechniczny

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

Mechanika ciał, które odkształcają się pod wpływem przyłożonych obciążeń



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

WIADOMOŚCI WSTĘPNE



ODKSZTAŁCENIA:

- Sprężyste
- Plastyczne

SCHEMAT OBLICZENIOWY

idealizacja (uproszczenie)
rzeczywistego problemu

ELEMENTY KONSTRUKCYJNE:

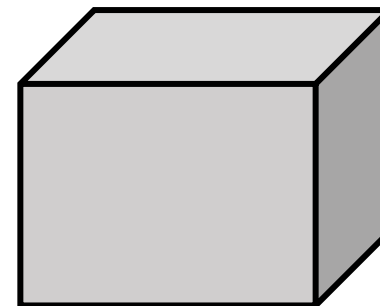
(w schemacie obliczeniowym)



pręty



płyty



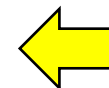
bryły

ZASADA ZESZTYWNIENIA

schemat obliczeniowy



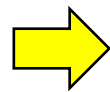
układ rzeczywisty



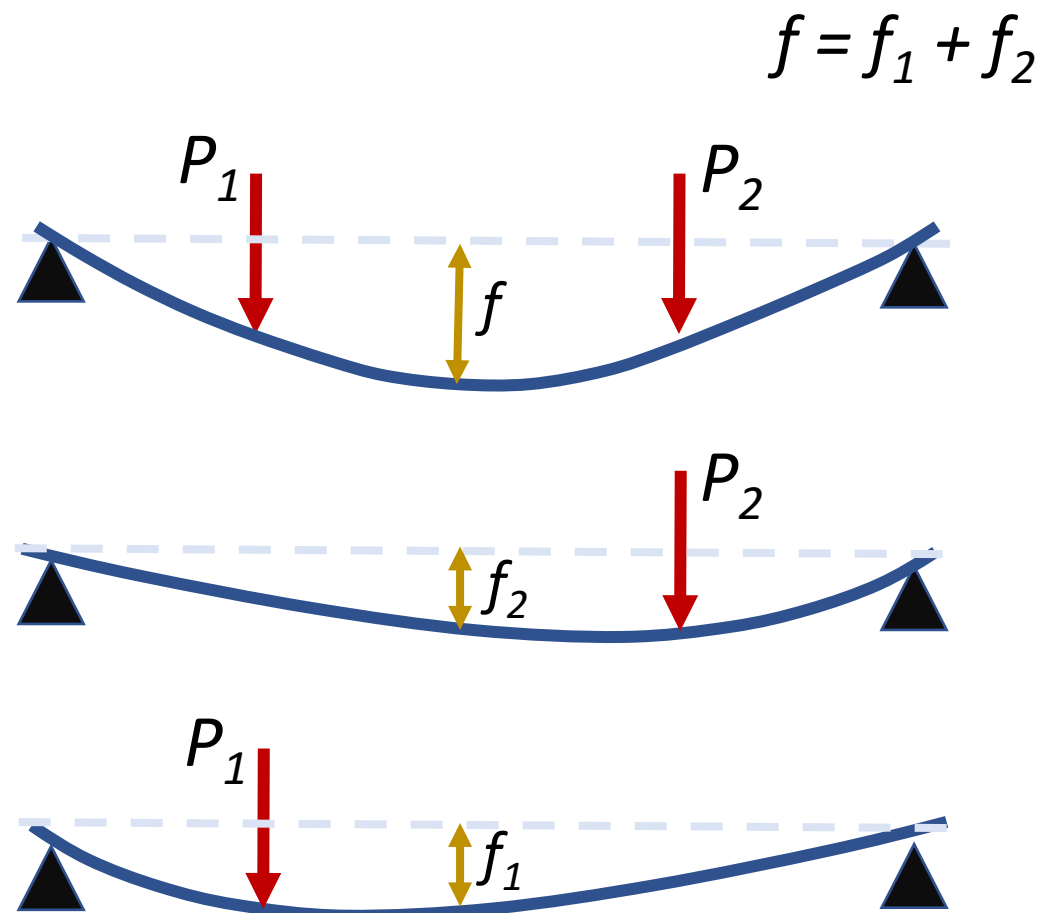
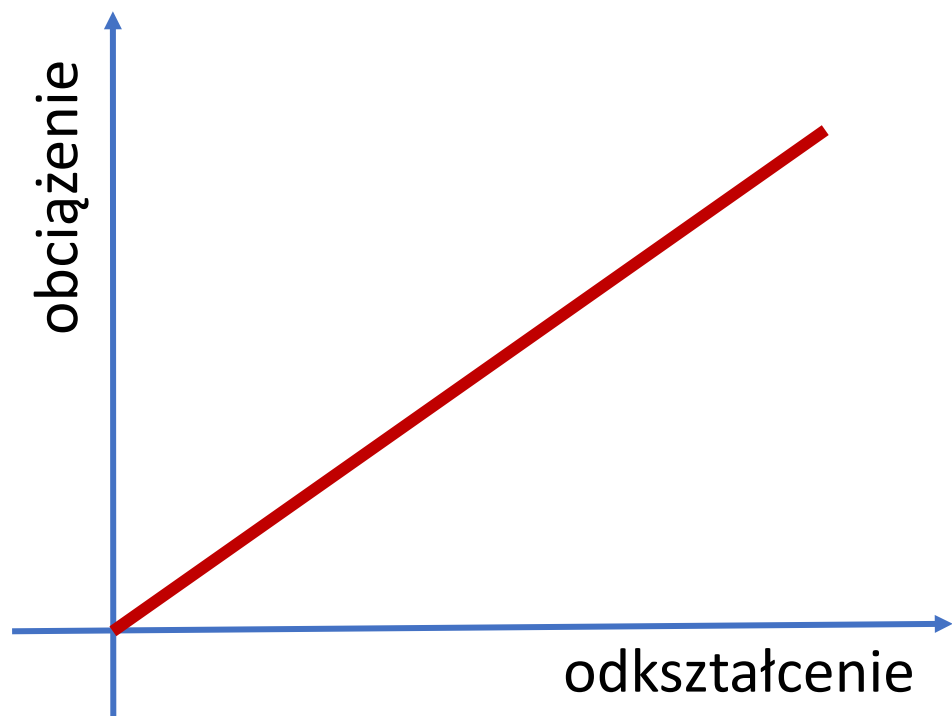
SCHEMAT OBLICZENIOWY

idealizacja (uproszczenie)
rzeczywistego problemu

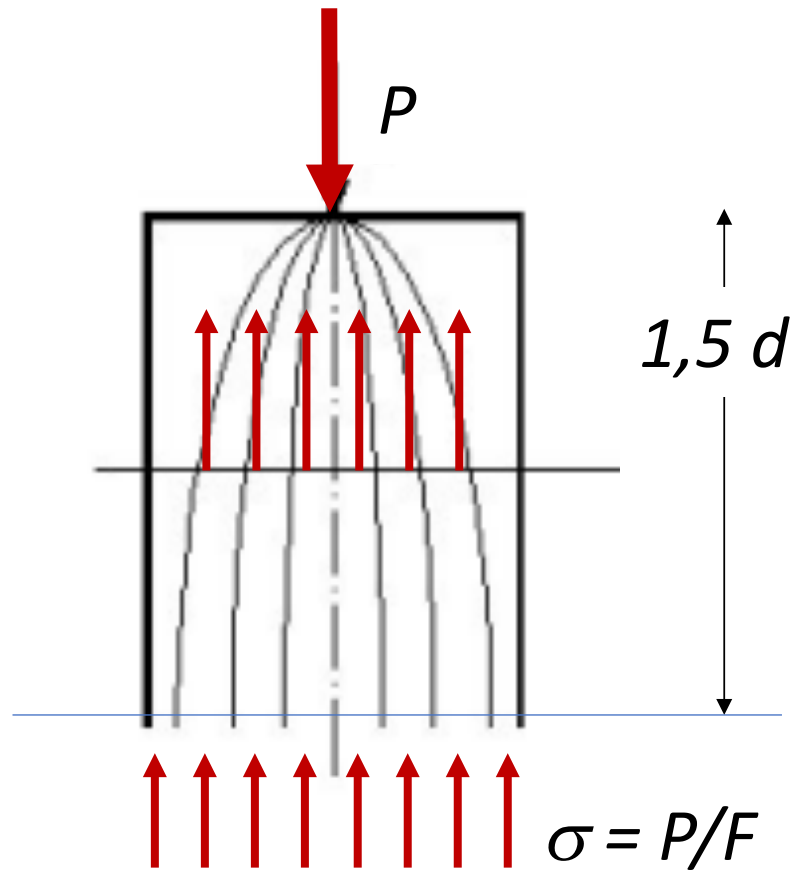
PRAWO HOOKE'a



ZASADA SUPERPOZYCJI



ZASADA DE SAINT-VENANTA



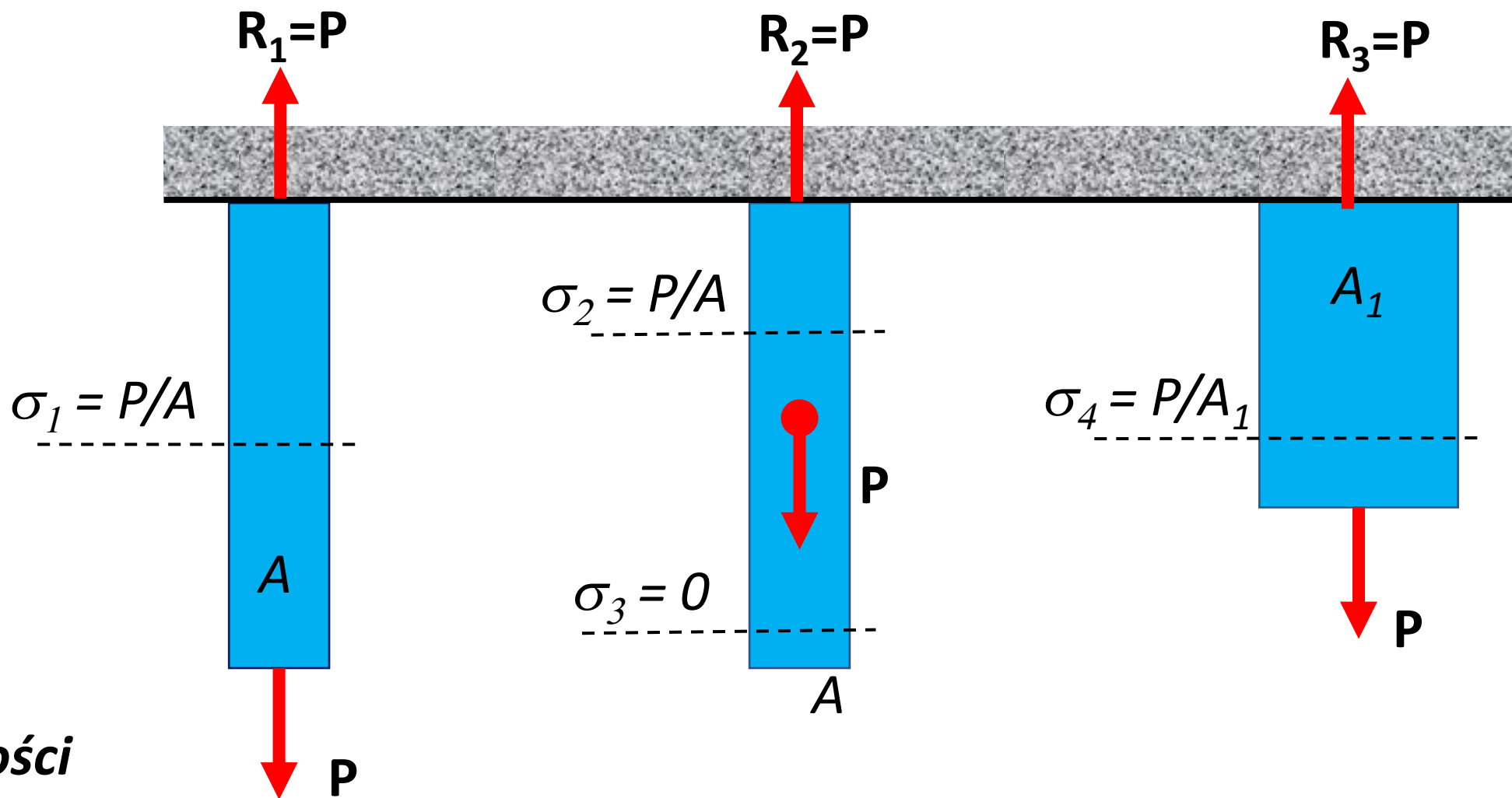
SCHEMAT OBLICZENIOWY



idealizacja (uproszczenie)
rzeczywistego problemu

Układy są statycznie równoważne

$$(R_1 = R_2 = R_3)$$



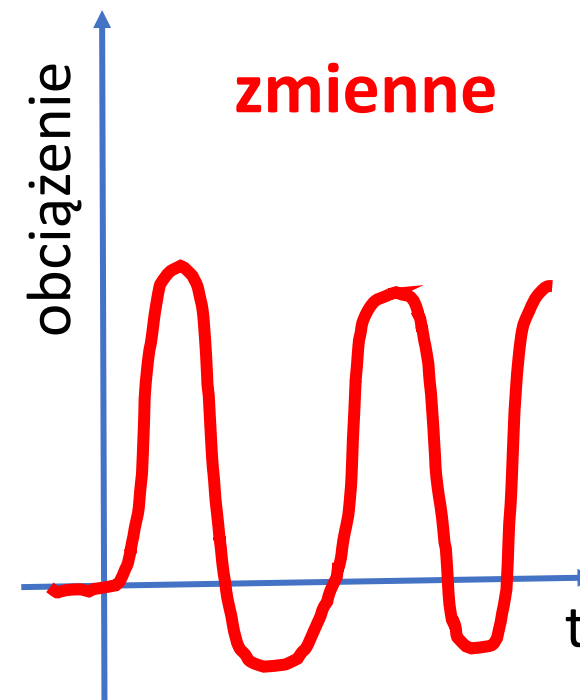
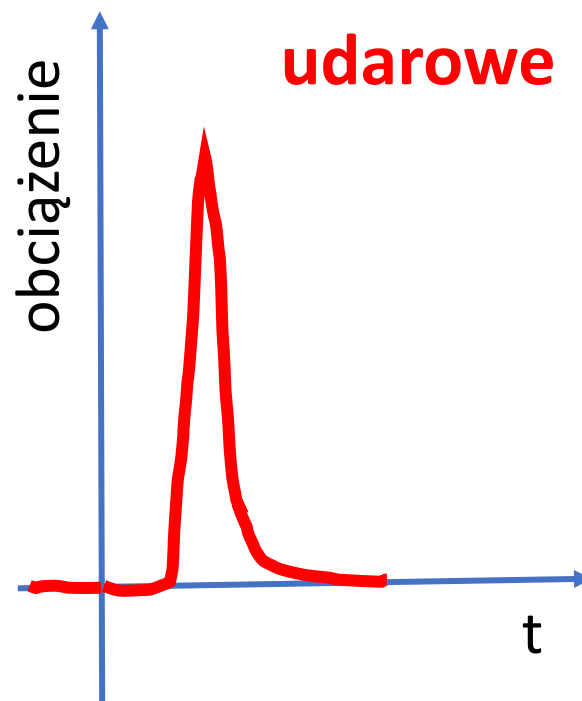
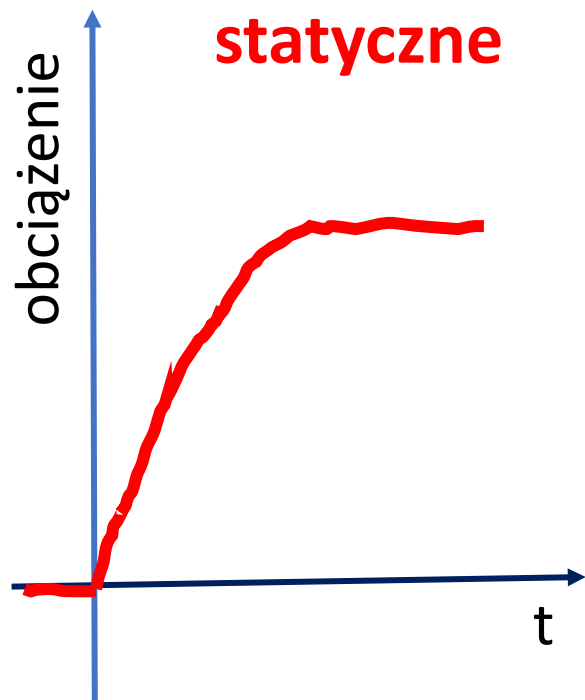
ale o wytrzymałości decydują

siły wewnętrzne

i naprężenia $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_4$

$$A_1 > A$$

RODZAJE OBCIĄŻEŃ

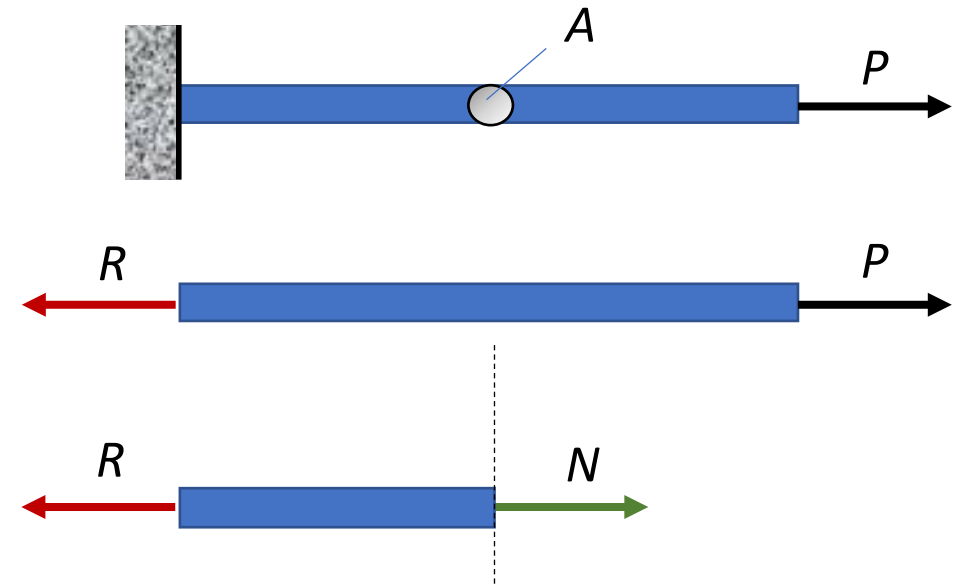


WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW = mechanika ciał odkształcalnych

Analiza odkształceń

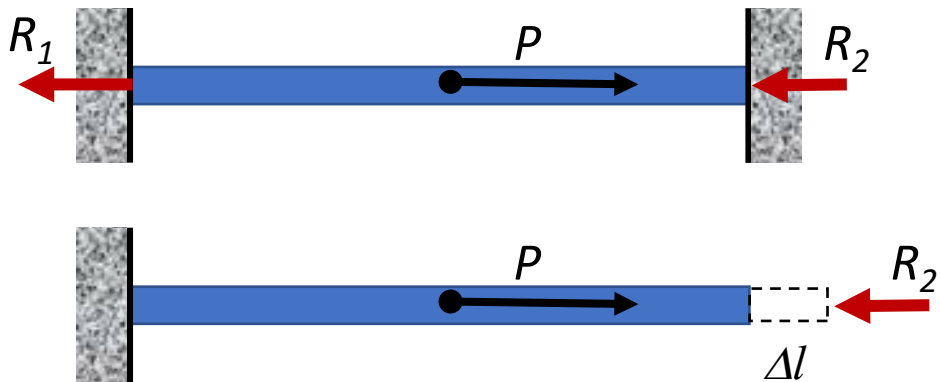


Wyznaczanie sił wewnętrznych (naprężeń)



- P – siła czynna
 - R – siła bierna (reakcja)
 - N – siła wewnętrzna
 - $\sigma = N/A$ (naprężenie)
- } siły zewnętrzne

Obliczanie układów statycznie niewyznaczalnych

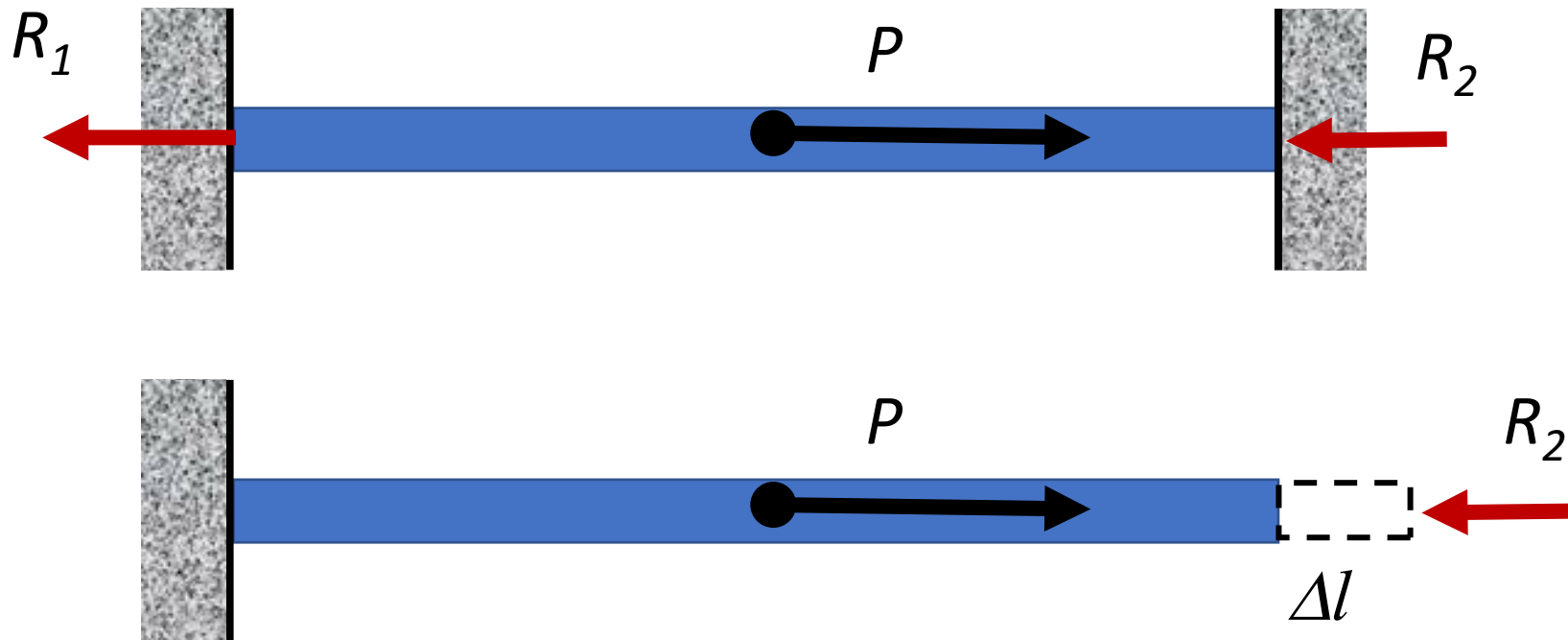


Analiza odkształceń



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW = mechanika ciał odkształcalnych

Obliczanie układów statycznie niewyznaczalnych



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW = mechanika ciał odkształcalnych

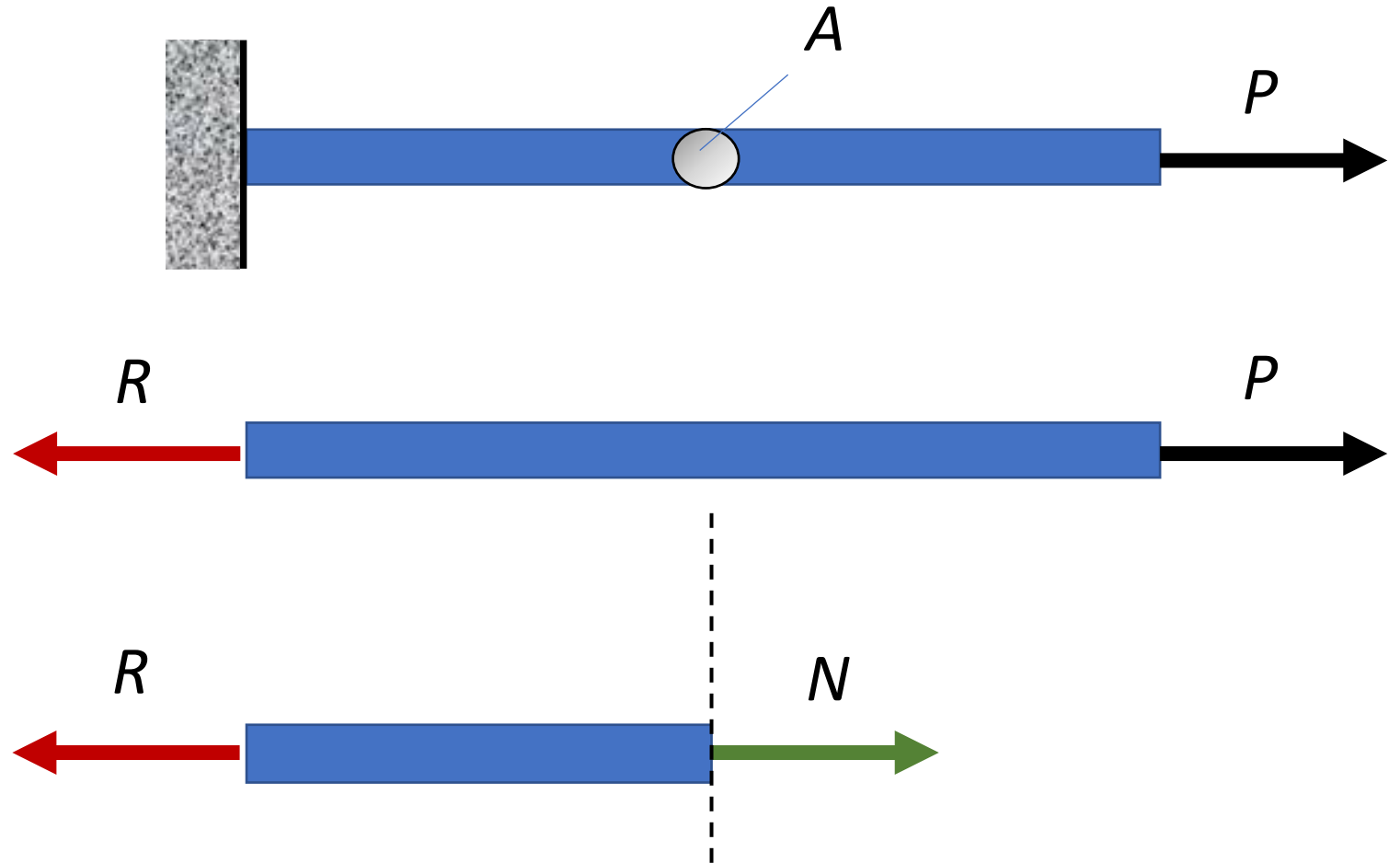
Wyznaczanie sił wewnętrznych (naprężeń)

P – siła czynna
 R – siła bierna
(reakcja)

} siły zewnętrzne

N – siła wewnętrzna

$\sigma = N/A$ (naprężenie)

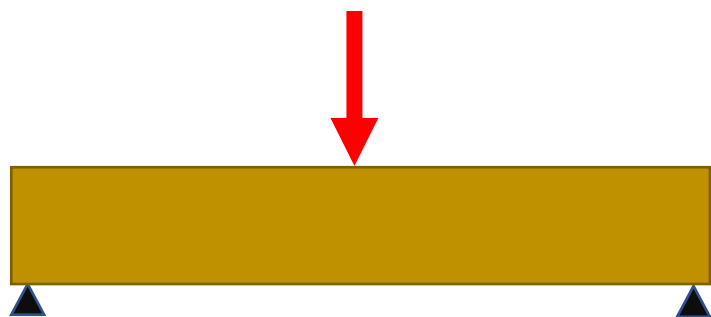


KRYTERIA OCENY KONSTRUKCJI

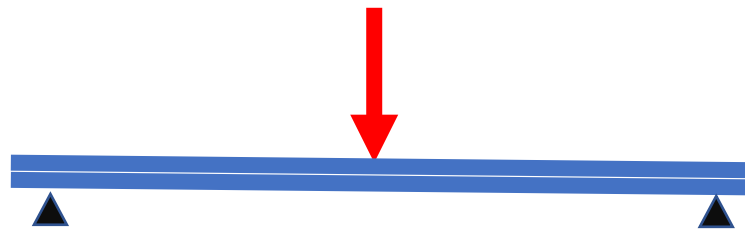
- wytrzymałość (naprężenia)
- sztywność (odkształcenia)
- stateczność
- koszty



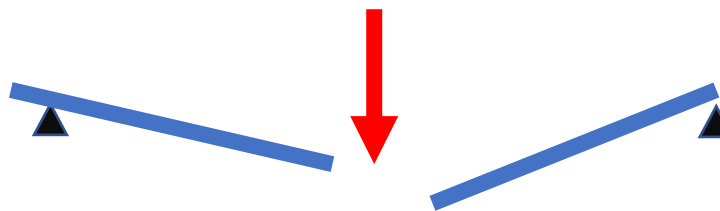
stateczność



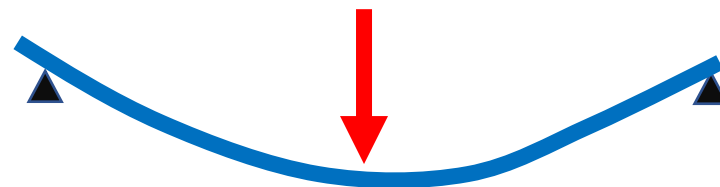
koszty



wytrzymałość (naprężenia)

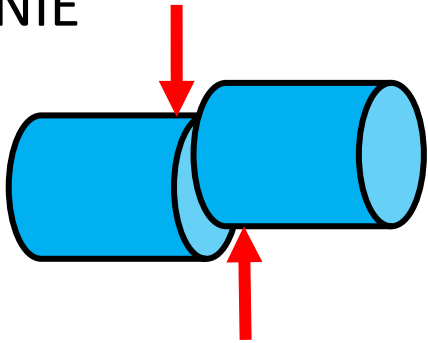


sztywność (odkształcenia)



**PROSTE
PRZYPADKI
OBCIĄŻENIA**

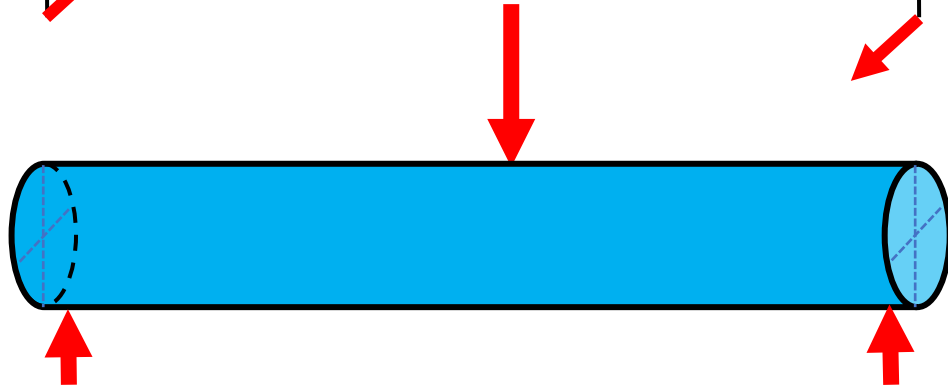
ŚCINANIE



ROZCIĄGANIE
(ŚCISKANIE)



SKRĘCANIE



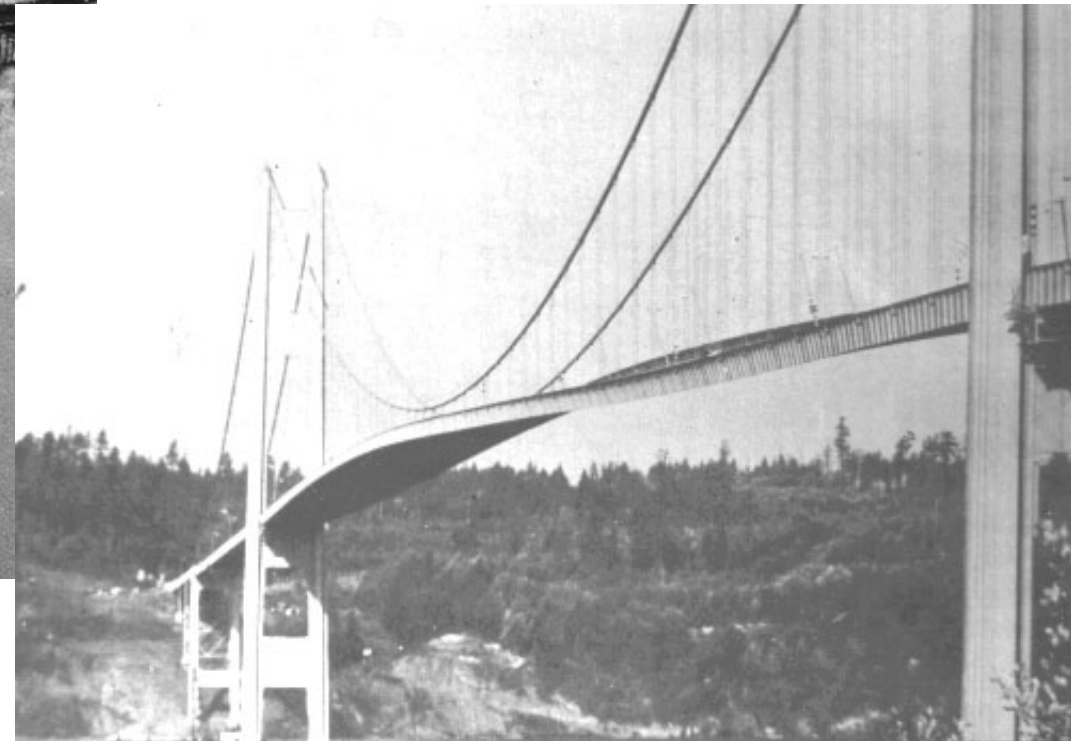
ZGINANIE

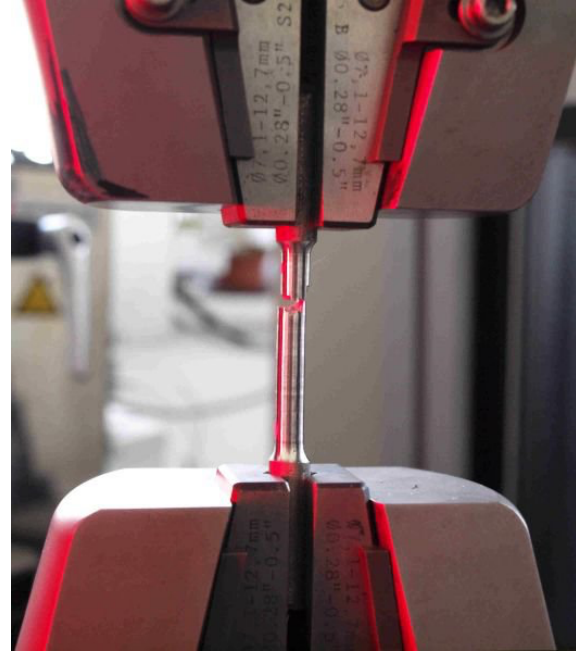
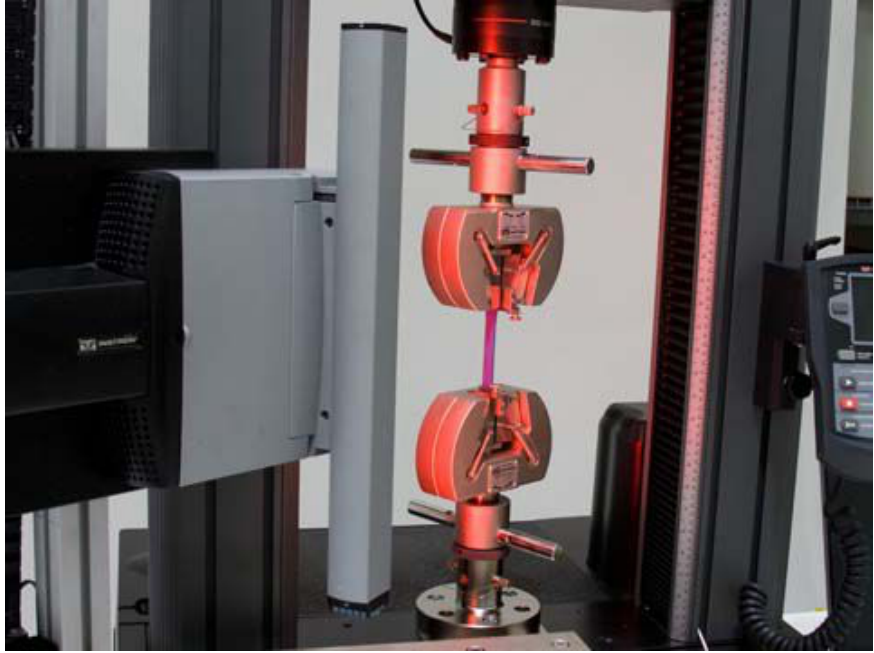


ZGINANIE

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE





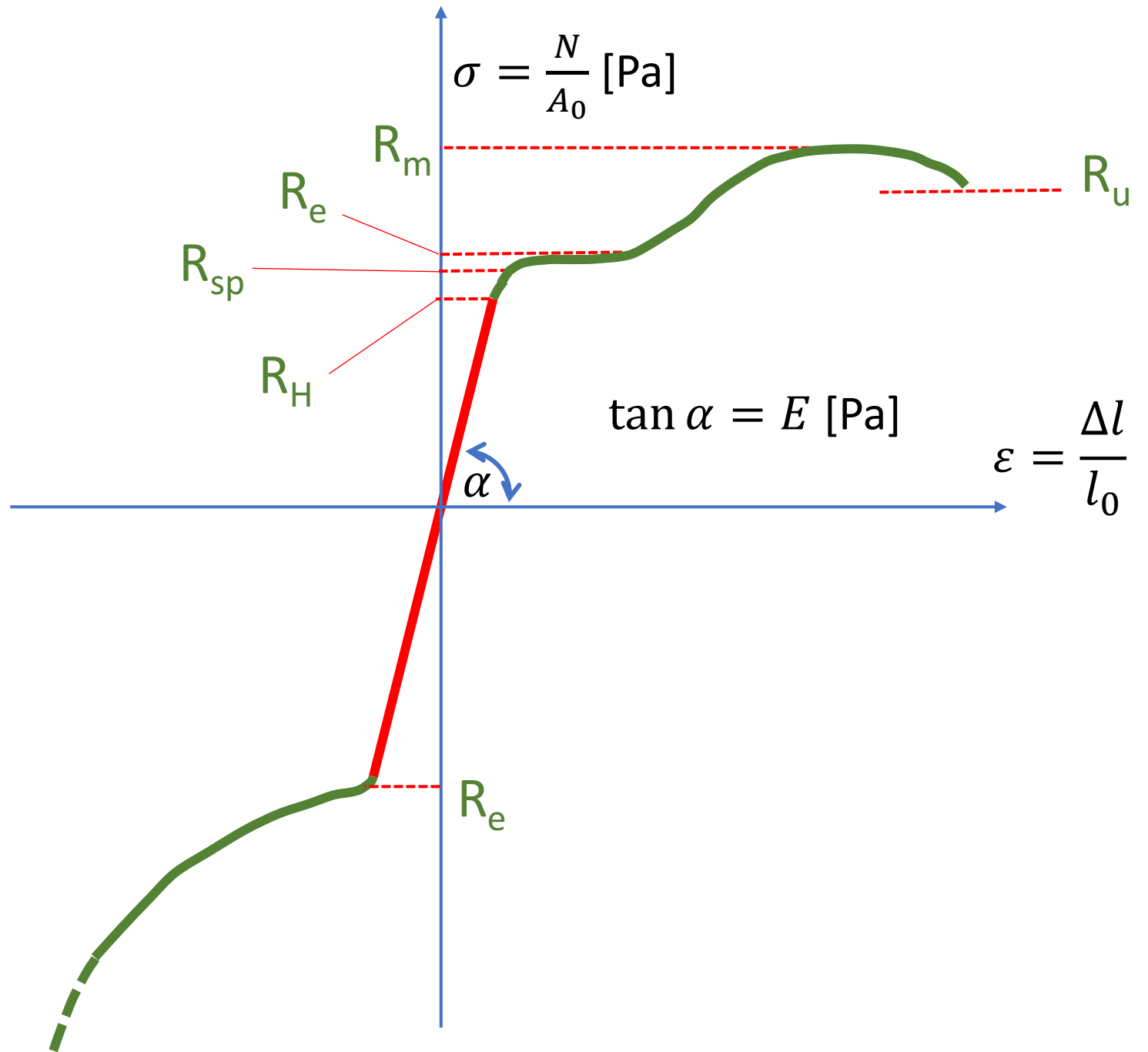
Prawo Hooke'a

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$



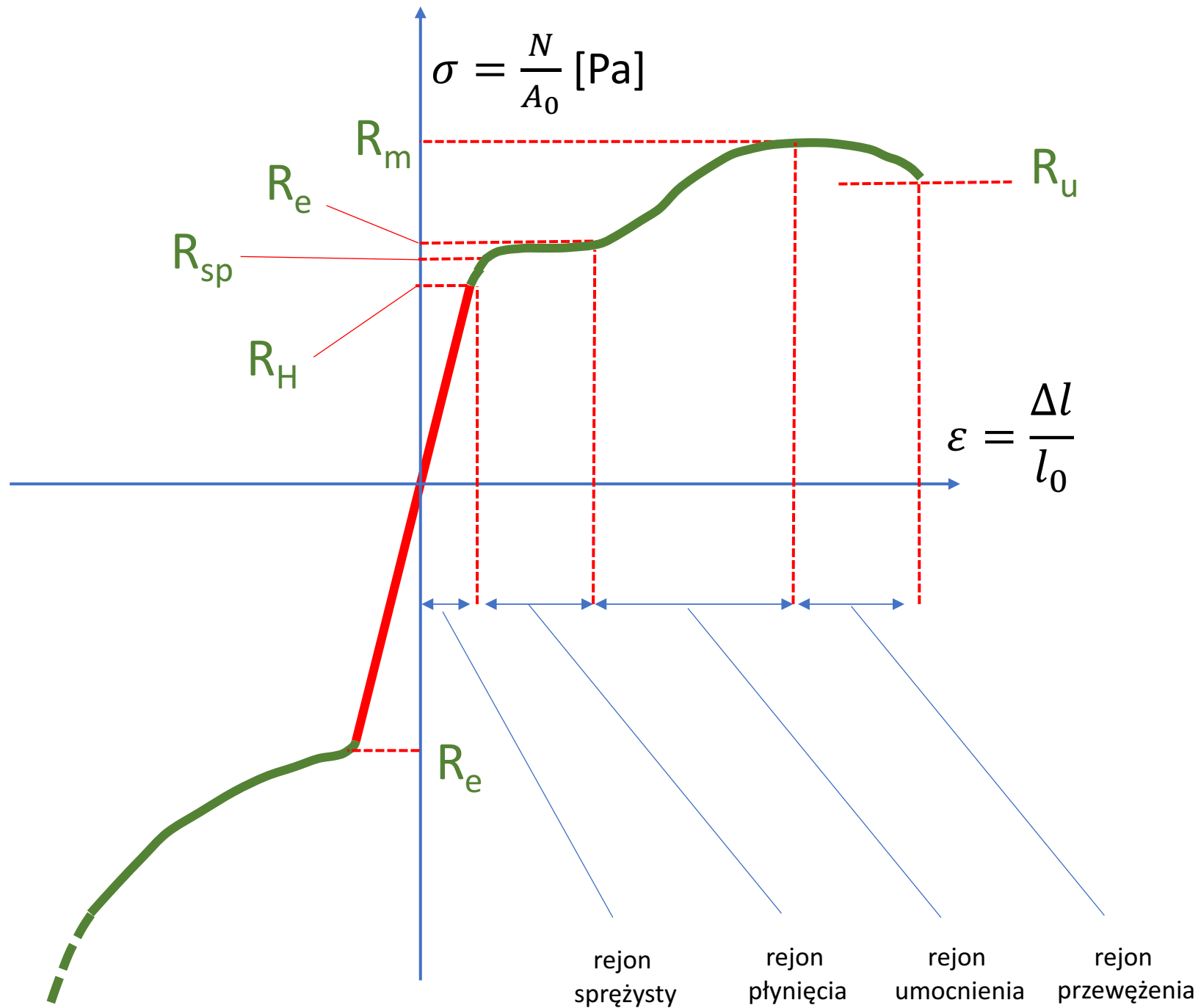
Prawo Hooke'a

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

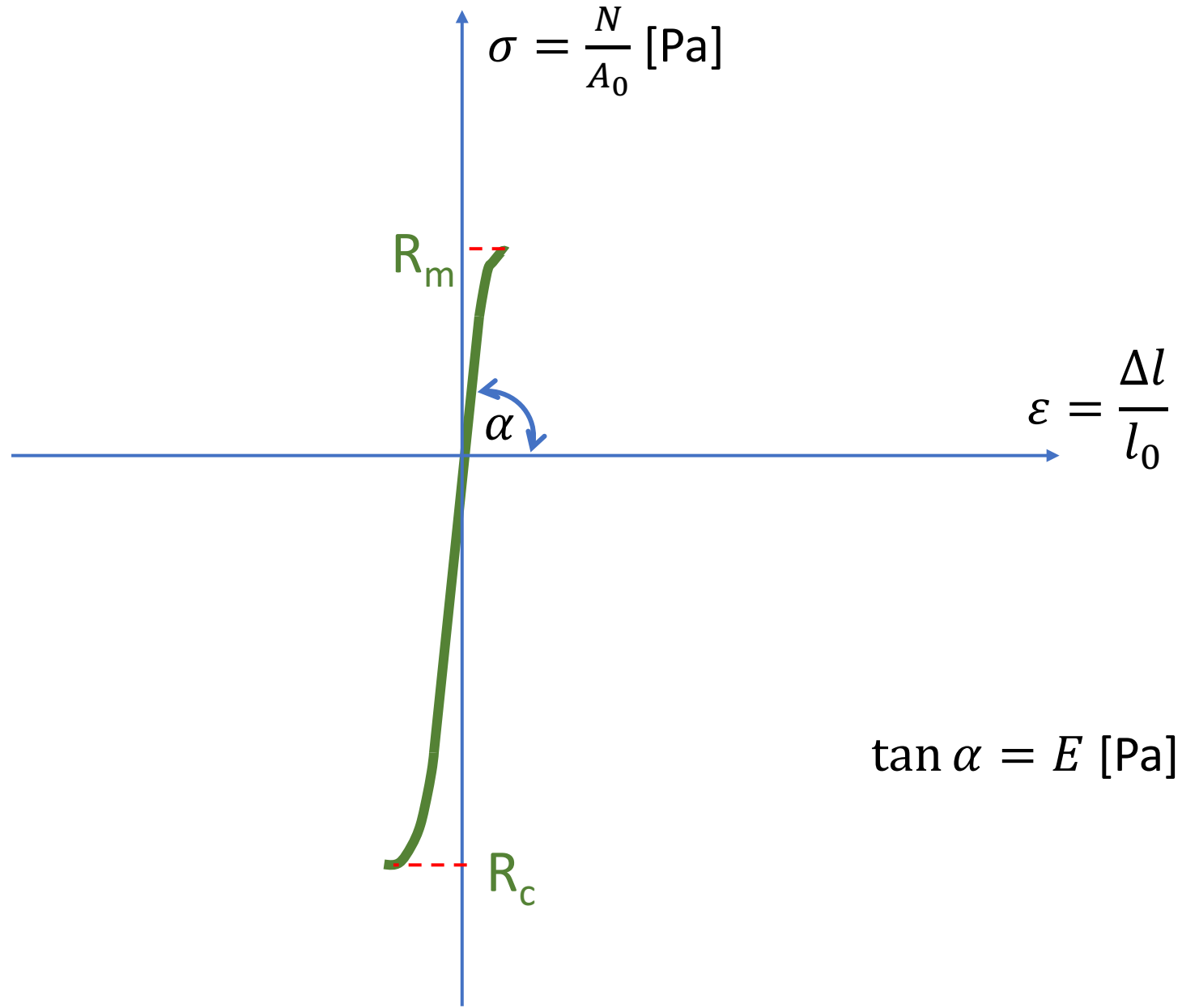
$$\sigma = \frac{N}{A}$$



$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$



Współczynnik bezpieczeństwa n :

$$\sigma \leq \sigma_{\text{dop}} = \sigma_{\text{nieb}} / n$$

$$n \geq 1$$

$$\sigma_{\text{nieb}} = R_e, R_m, R_c$$

10^9	<i>giga -</i>	<i>G</i>
10^6	<i>mega -</i>	<i>M</i>
10^3	<i>kilo -</i>	<i>k</i>
10^2	<i>hekto -</i>	<i>h</i>
10^1	<i>deka -</i>	<i>da</i>
1	-----	-----
10^{-1}	<i>decy -</i>	<i>d</i>
10^{-2}	<i>centy -</i>	<i>c</i>
10^{-3}	<i>mili -</i>	<i>m</i>
10^{-6}	<i>mikro -</i>	μ
10^{-9}	<i>nano -</i>	<i>n</i>

Guma: $E = 0,01 - 0,1$

Stal: $E = 190 - 210$

Aluminium : $E = 70$

[GPa]

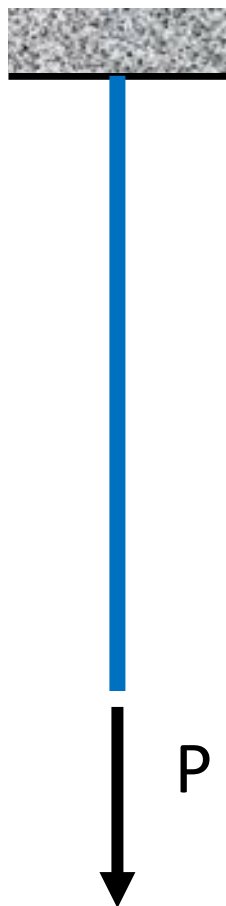
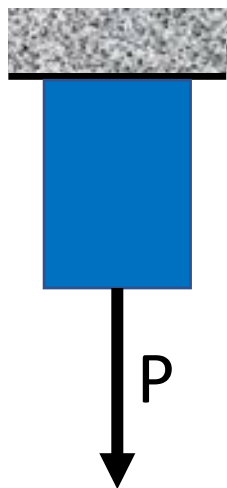
Stal konstrukcyjna St3: $R_m = 380 - 470$, $R_e = 220$

Stal sprężynowa 45 S: $R_m = 1200$, $R_e = 1000$

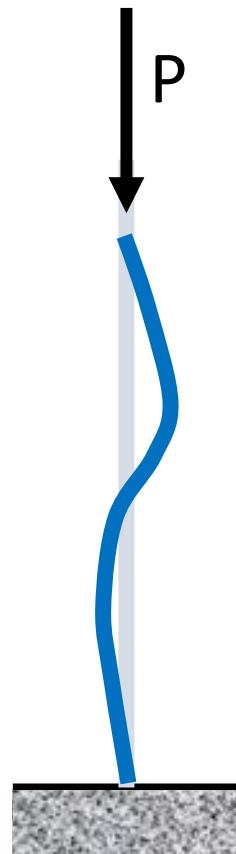
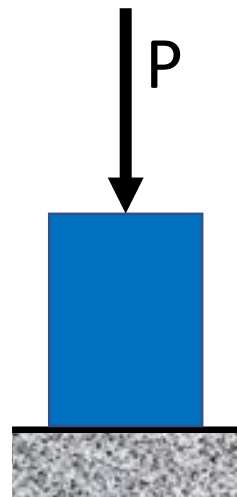
Żeliwo ZI 150: $R_m = 150$

Aluminium: $R_m = 1000$

[MPa]

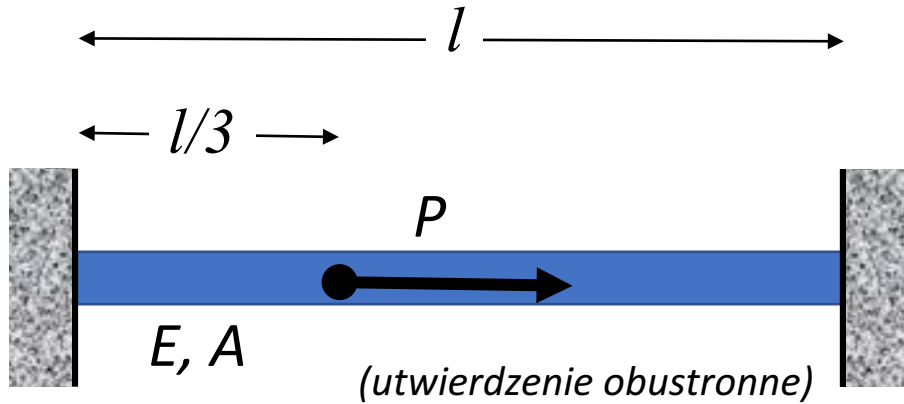


$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{dop}$$



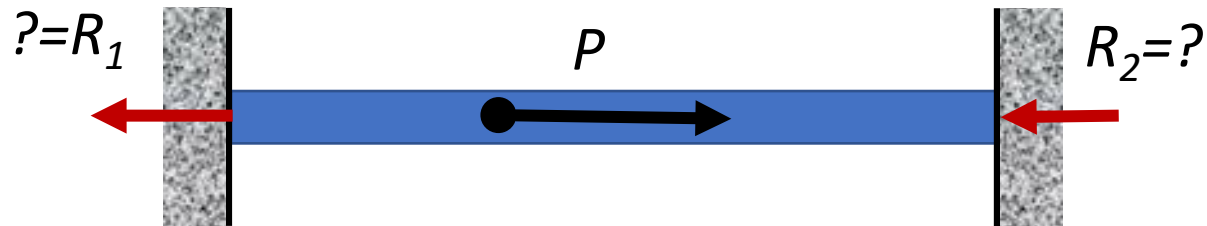
$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{dop}$$

Obliczanie układów statycznie niewyznaczalnych



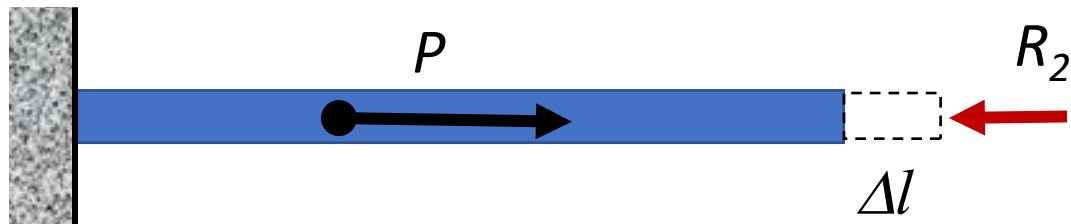
równanie statyki

$$P = R_1 + R_2$$



równanie odkształceń

$$\Delta l = \frac{R_2 l}{EA} = \frac{P \left(\frac{l}{3}\right)}{EA}$$



Obliczanie naprężeń termicznych

l

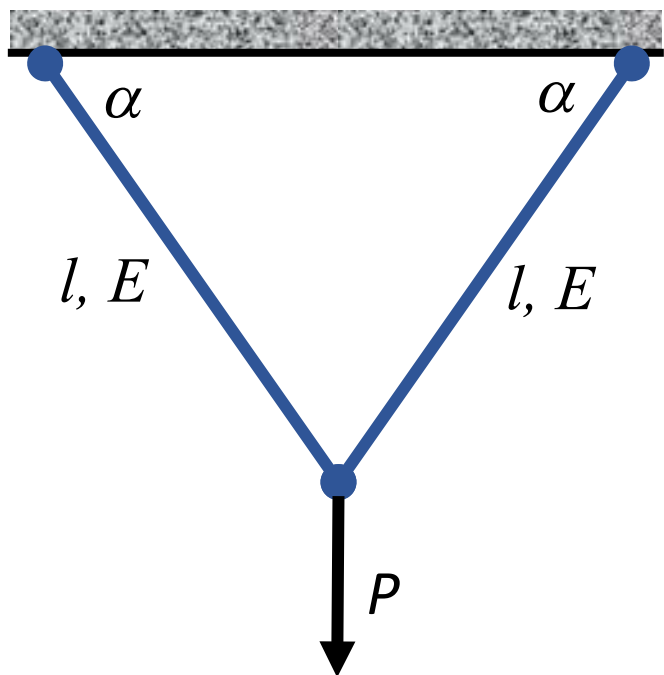


$$\Delta l = \frac{Rl}{EA} = \lambda l \Delta T = \Delta l$$

*prawo
Hooke'a*

*odkształcenie
termiczne*

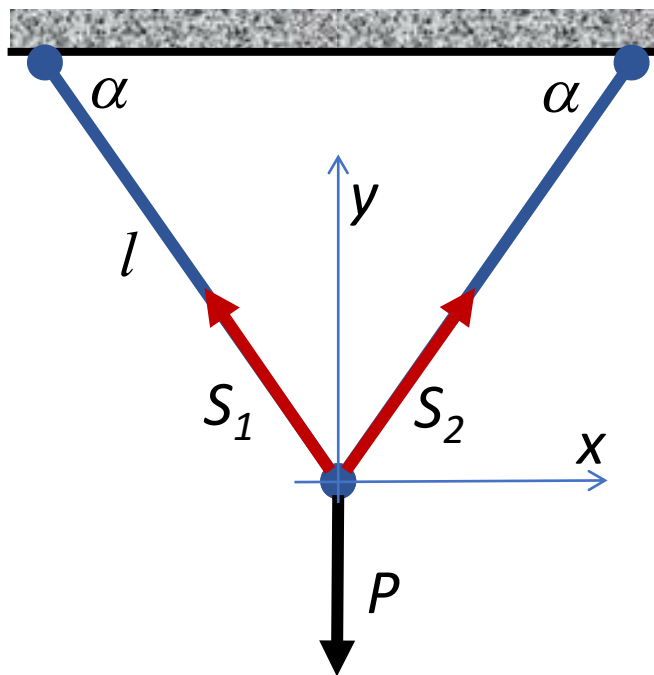
Wyznaczyć: A, f



$$-S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha = 0$$

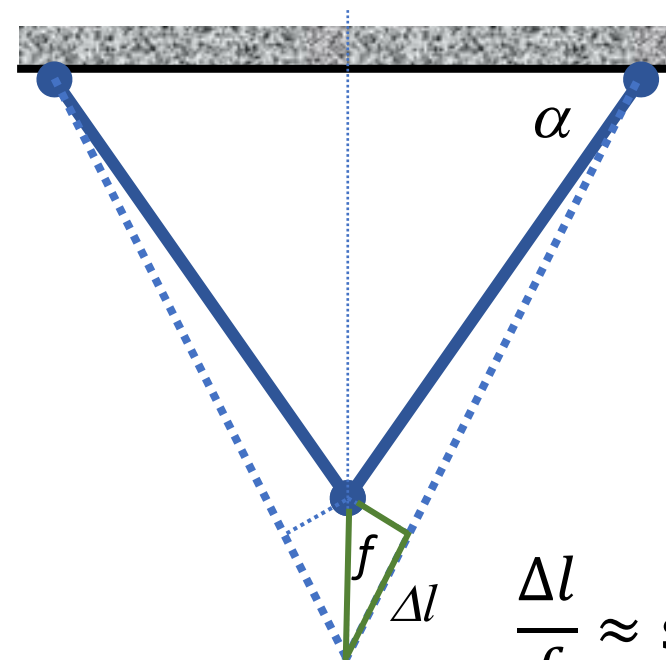
$$S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha - P = 0$$

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$



$$\sigma = \frac{P/2}{A} \leq \sigma_{dop} = \frac{\sigma_{nieb}}{n} = \frac{R_e}{n}$$

$$A \geq \frac{P n}{2 R_e}$$

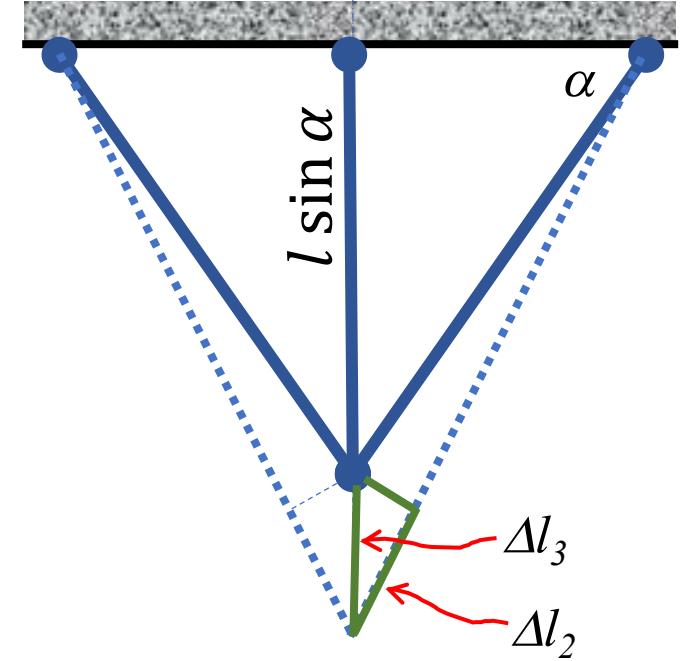
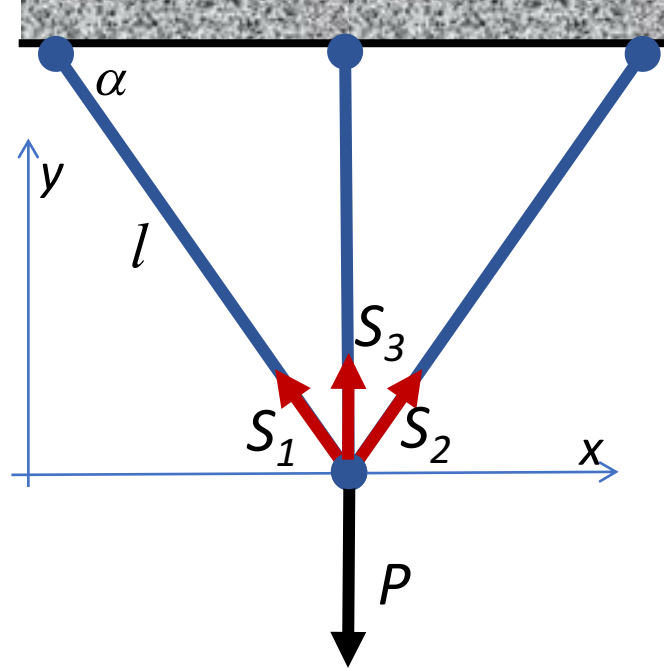
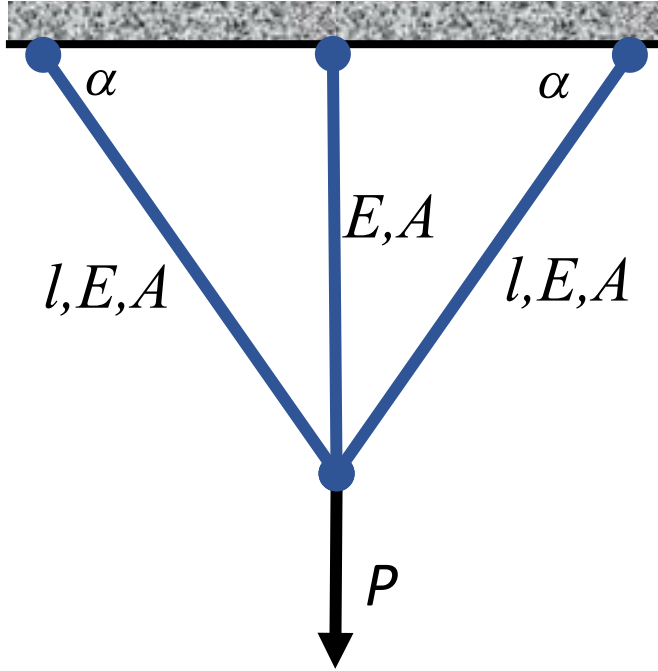


$$\frac{\Delta l}{f} \approx \sin \alpha$$

$$\Delta l = \frac{\left(\frac{P}{2 \sin \alpha}\right) l}{EA}$$

$$f = \frac{\Delta l}{\sin \alpha} = \frac{\left(\frac{P}{2 \sin \alpha}\right) l}{EA \sin \alpha}$$

Wyznaczyć: $S_1, S_1, S_1, \Delta l_3$



$$-S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha = 0$$

$$S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha + S_3 - P = 0$$

$$S_1 = S_2 = S$$

$$2S \sin \alpha + S_3 - P = 0$$

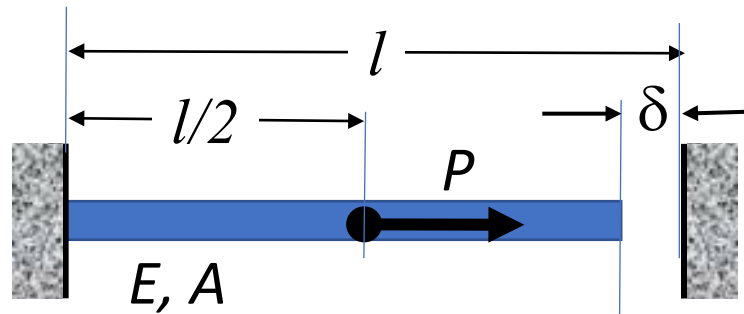
$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l = \frac{Sl}{EA}$$

$$\Delta l_3 = \frac{S_3 l \sin \alpha}{EA}$$

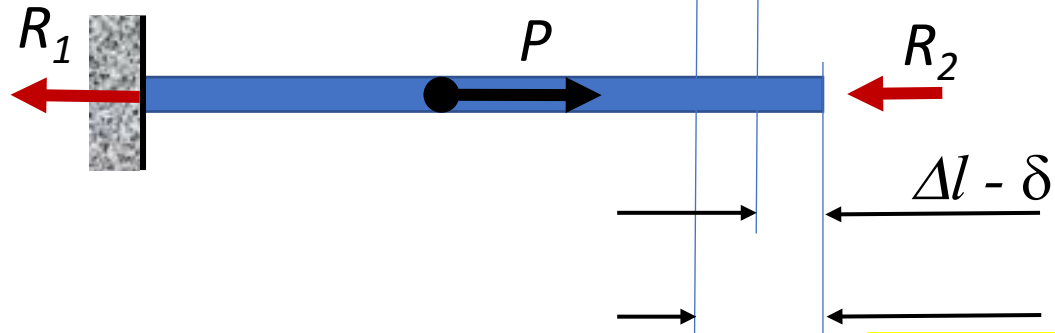
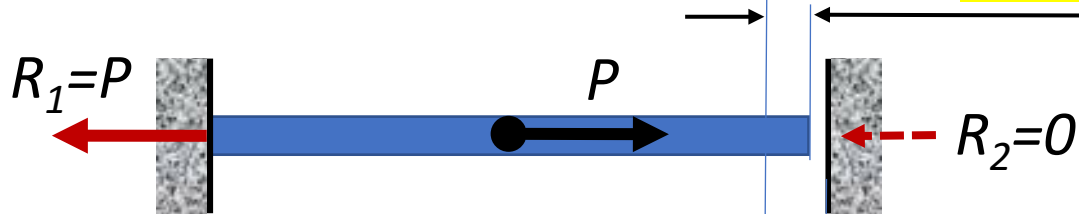
$$\frac{\Delta l}{\Delta l_3} \approx \sin \alpha$$

$$S = S_3 (\sin \alpha)^2$$

Obliczanie układów statycznie niewyznaczalnych



$$\Delta l < \delta$$



$$\Delta l > \delta$$

$$\Delta l = \frac{P(\frac{l}{2})}{EA}$$

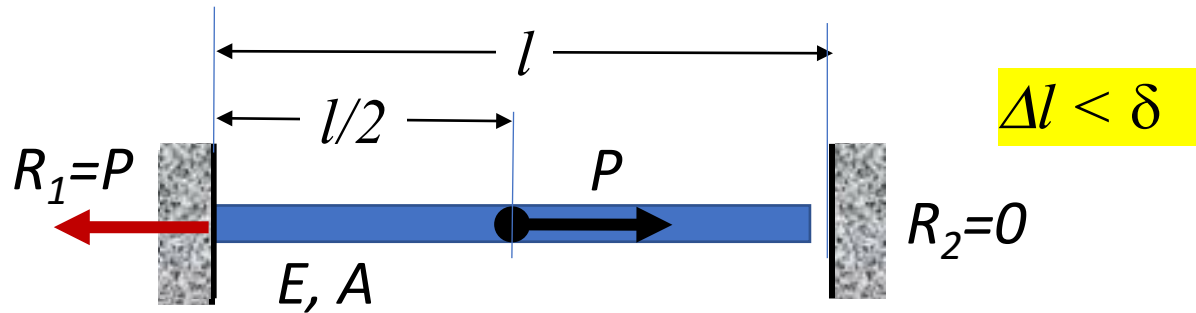
$$R_1 = P \quad R_2 = 0$$

$$\Delta l = \frac{P(\frac{l}{2})}{EA}$$

$$P = R_1 + R_2 \quad \text{równanie statyki}$$

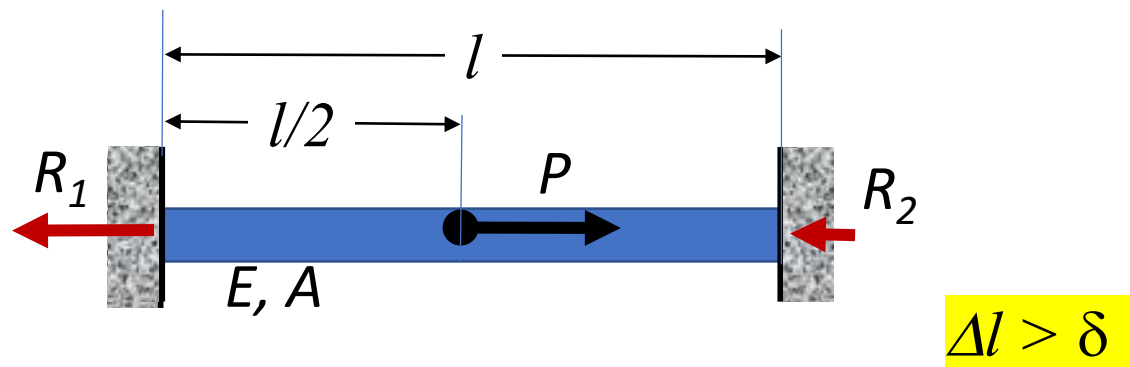
$$\Delta l - \delta = \frac{R_2 l}{EA} \quad \text{równanie odkształceń}$$

Obliczanie układów statycznie niewyznaczalnych



$$E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l = 1 \text{ m} \quad \delta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$



$$P = 10^4 \text{ N}$$

$$\Delta l = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta l = \frac{P \left(\frac{l}{2}\right)}{EA}$$

$$R_1 = P \quad R_2 = 0$$

$$P = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$\Delta l = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

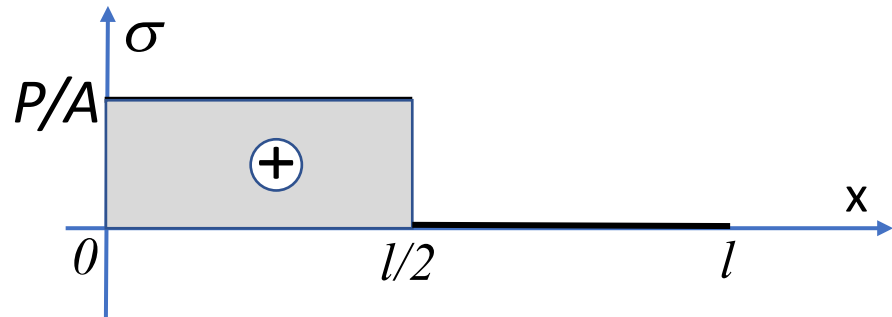
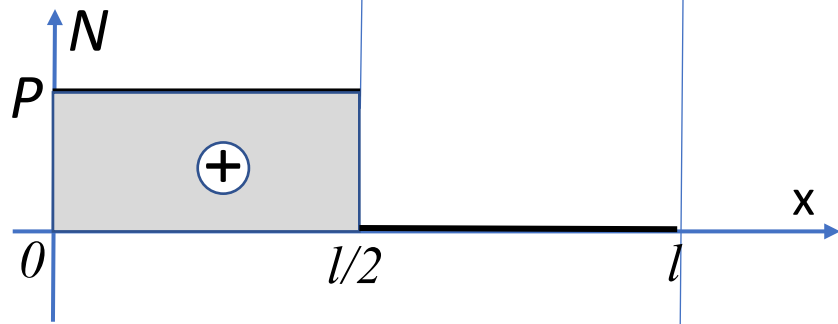
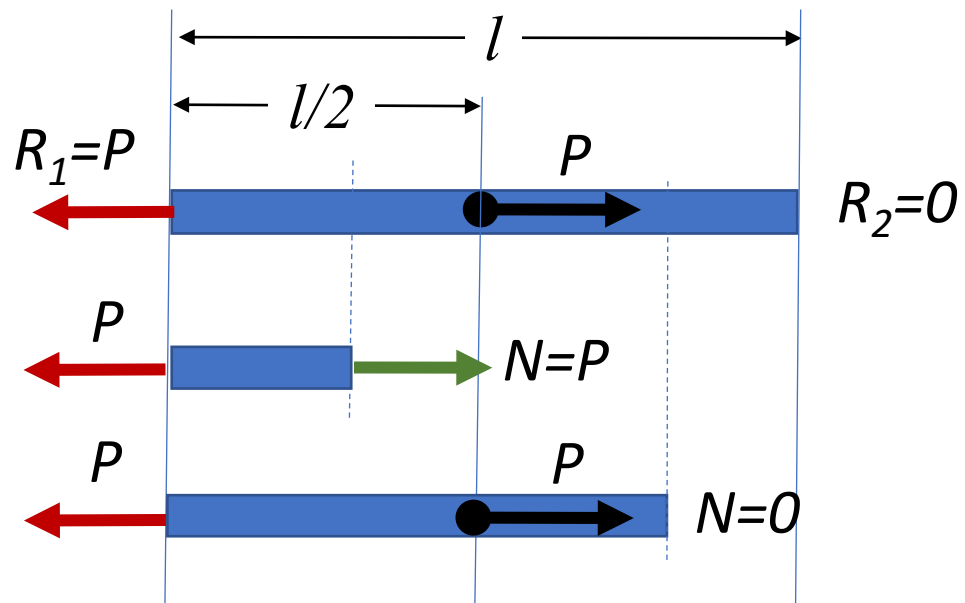
$$\Delta l = \frac{P \left(\frac{l}{2}\right)}{EA}$$

$$R_1 = 20500 \text{ N}$$

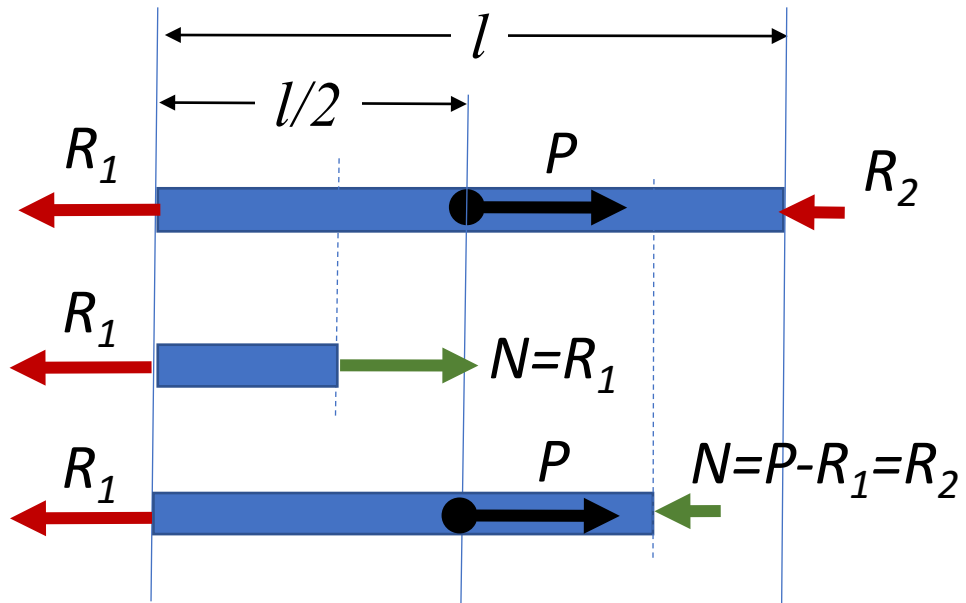
$$R_2 = 4500 \text{ N}$$

$$P = R_1 + R_2$$

$$\Delta l - \delta = \frac{R_2 l}{EA}$$



$A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ $P = 10^4 \text{ N}$ $R_1 = 10^4 \text{ N}$ $R_2 = 0$
--

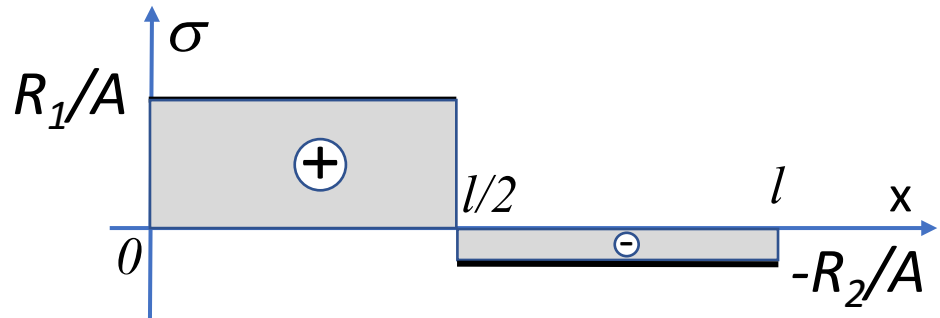
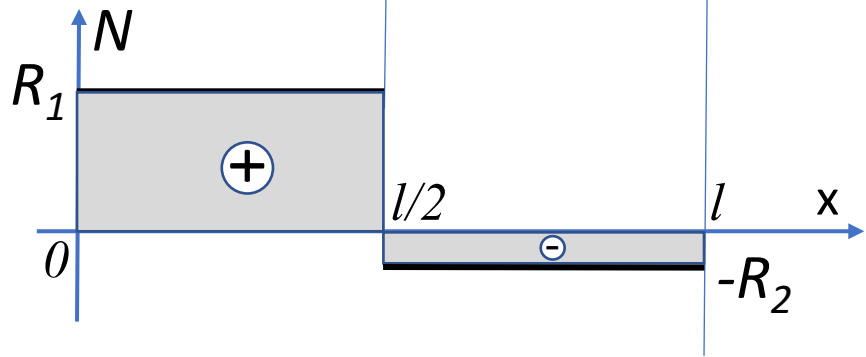


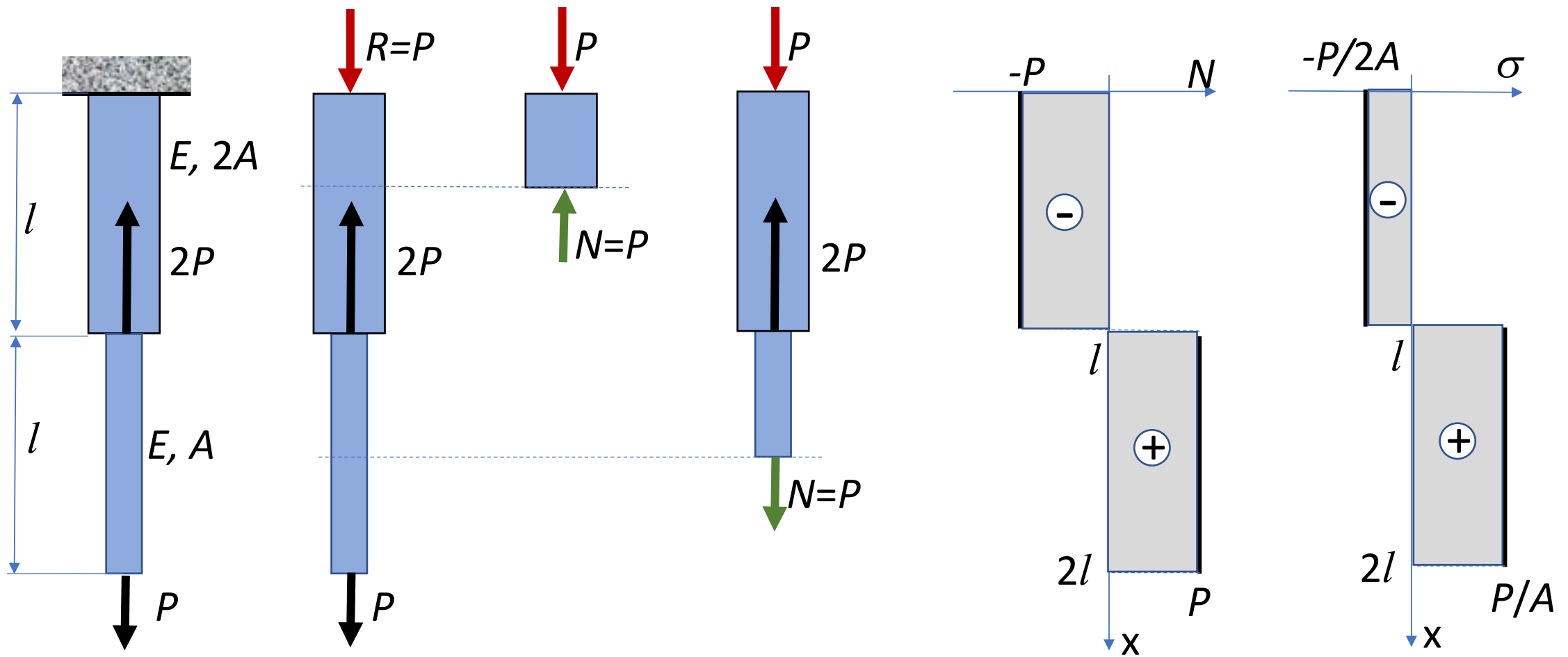
$$A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$P = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$R_1 = 20500 \text{ N}$$

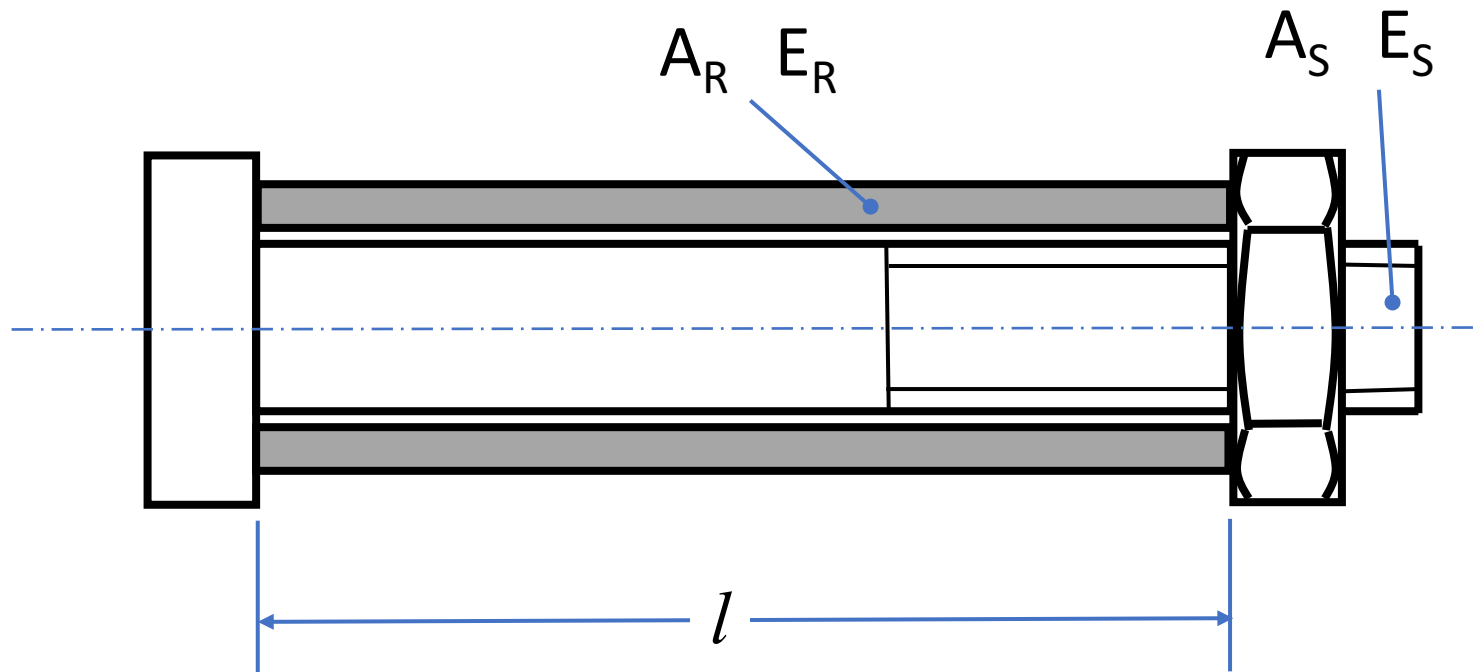
$$R_2 = 4500 \text{ N}$$





skok śruby - h

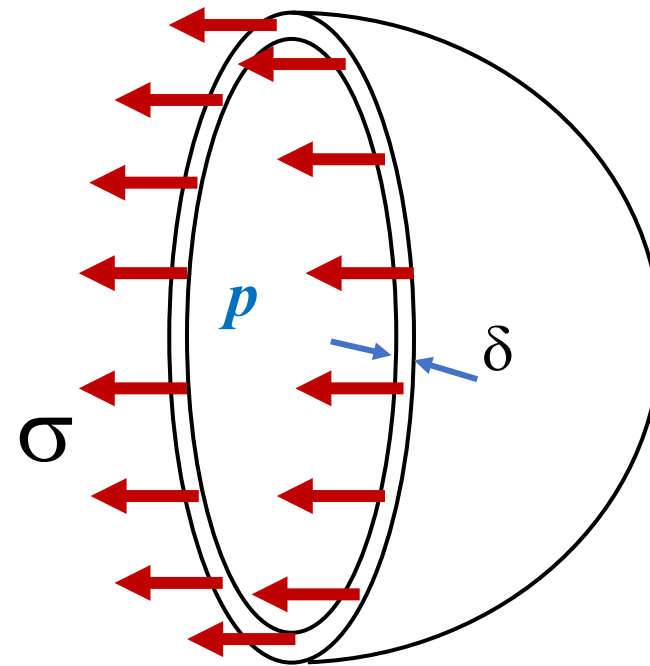
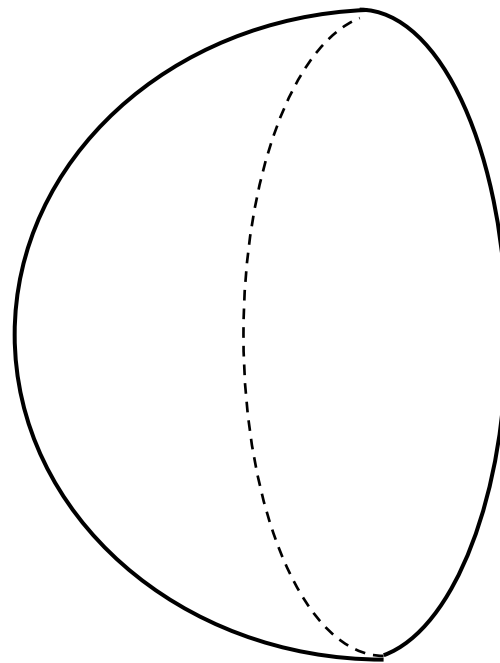
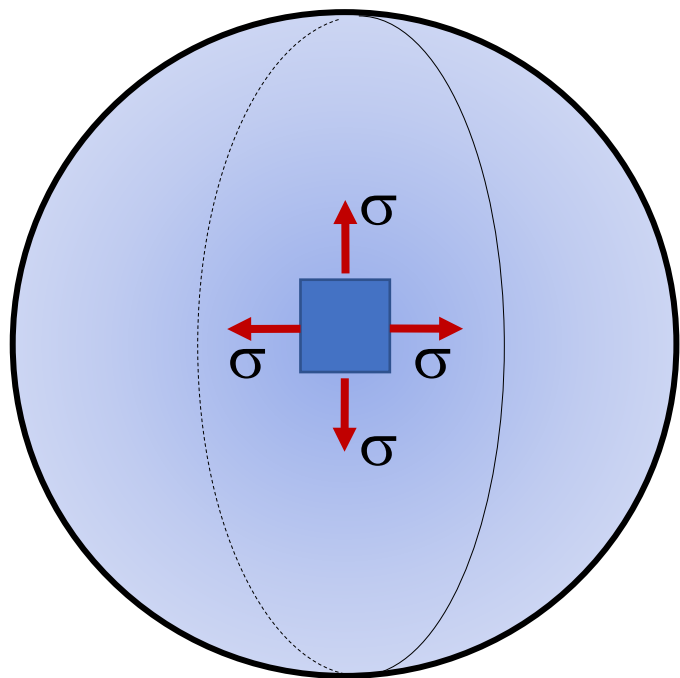
$\frac{1}{4}$ obrotu nakrętki



obliczyć naprężenia

σ_R , σ_S

Zbiornik kulisty



$$\frac{\pi d^2}{4} p = \pi d \delta \sigma$$



$$\sigma = \frac{p d}{4 \delta}$$

$$l d p = 2 l \delta \sigma_1$$

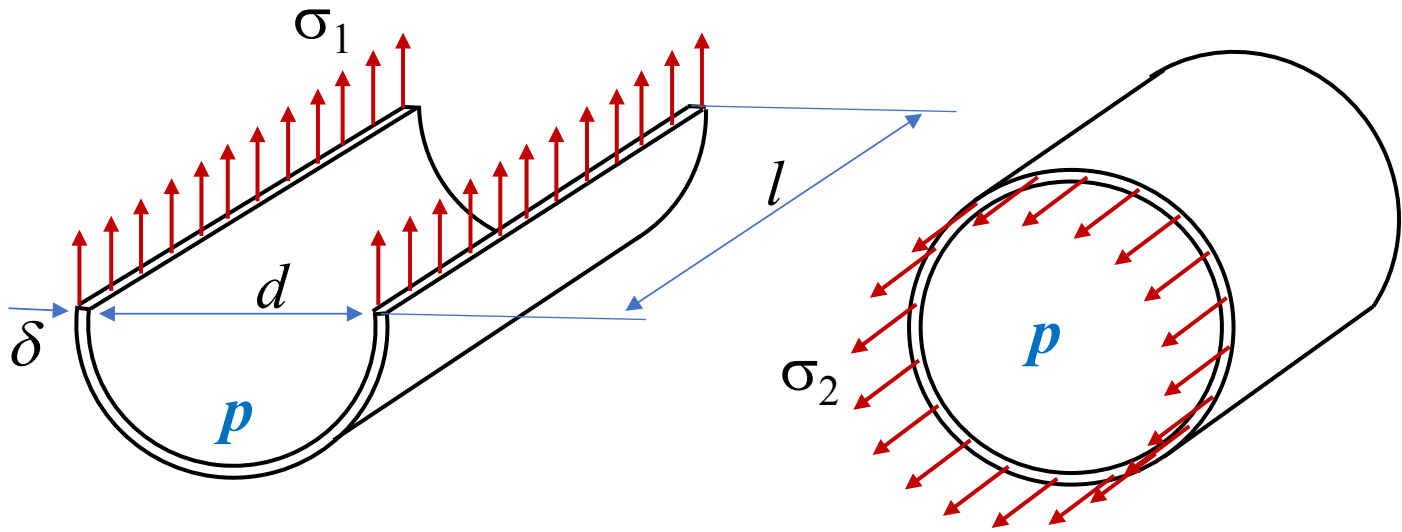
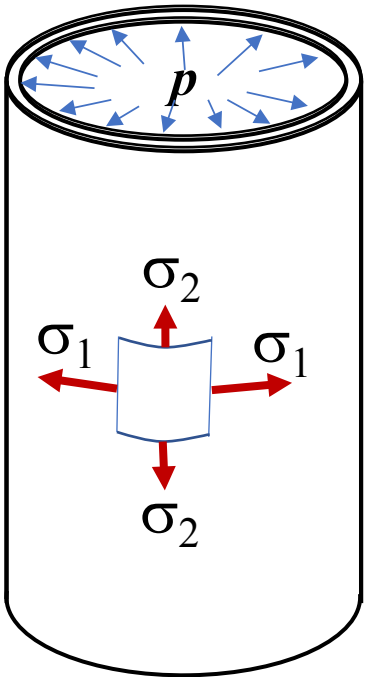
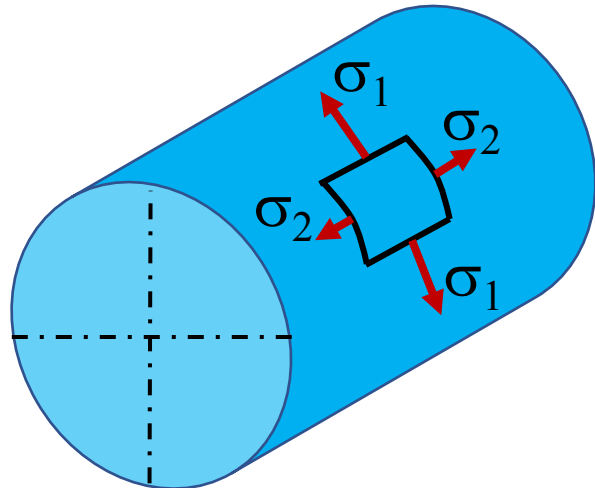


$$\sigma_1 = \frac{p d}{2 \delta}$$

$$\frac{\pi d^2}{4} p = \pi d \delta \sigma_2$$



$$\sigma_2 = \frac{p d}{4 \delta}$$



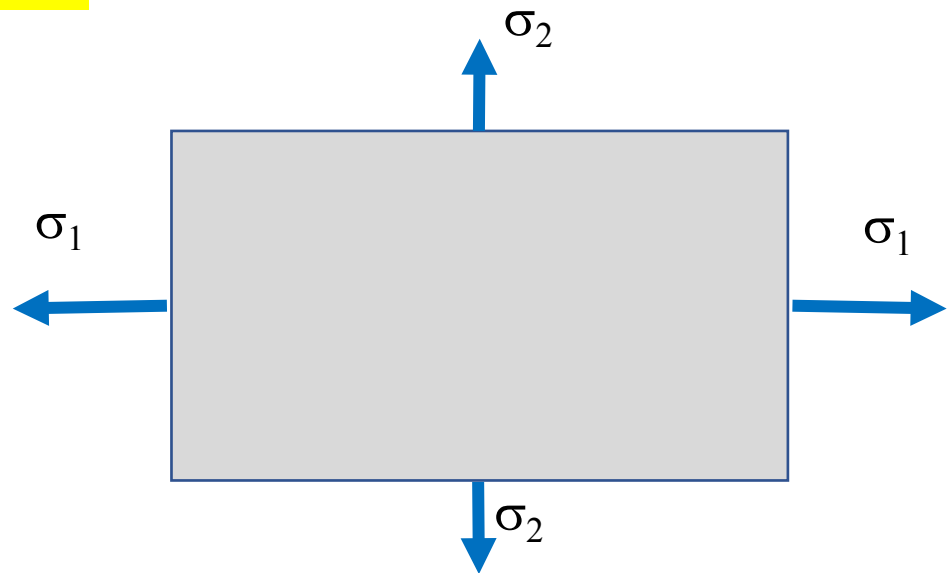


WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

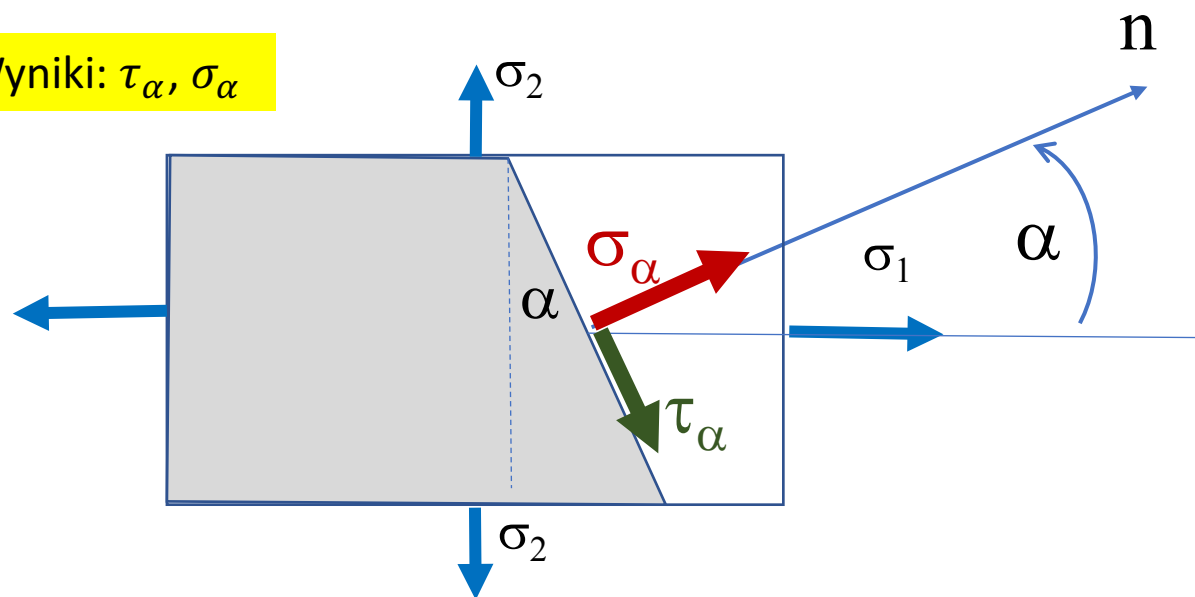
ANALIZA STANU NAPRĘŻEŃ



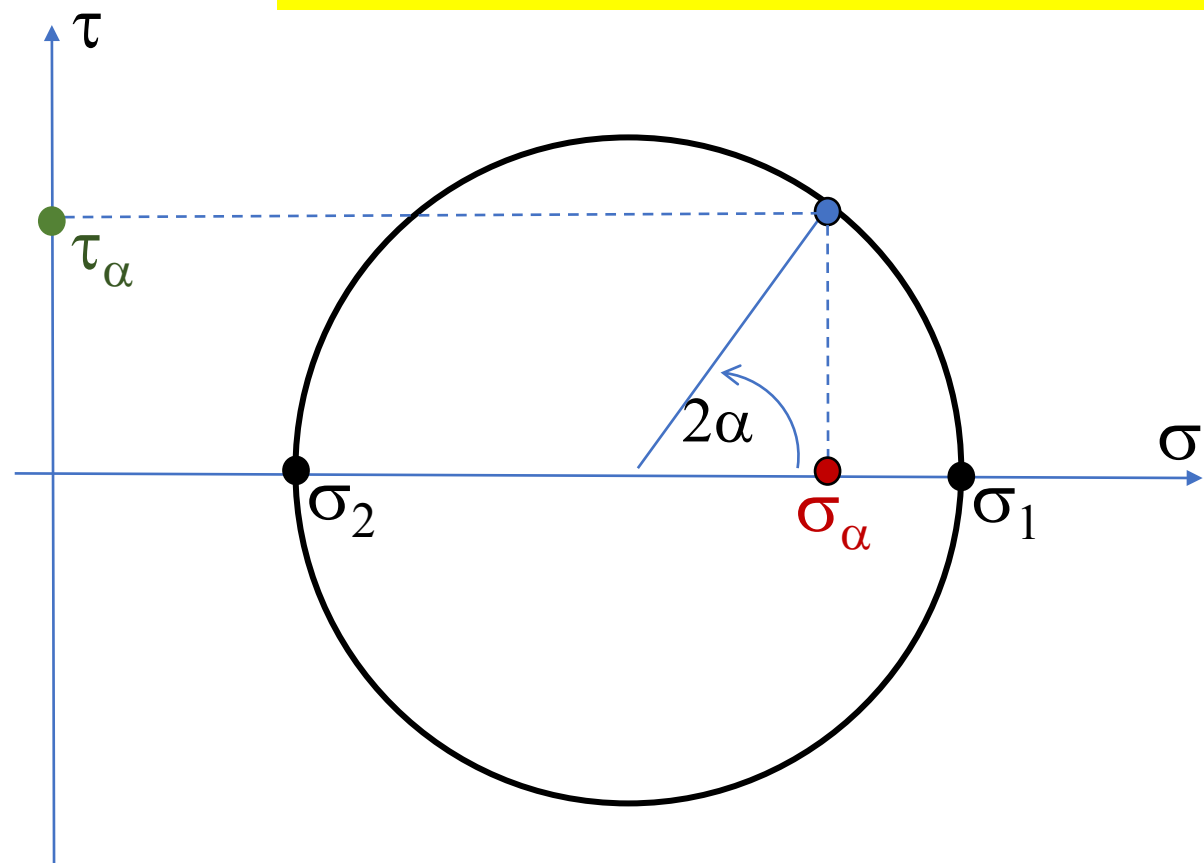
Dane



Wyniki: $\tau_\alpha, \sigma_\alpha$

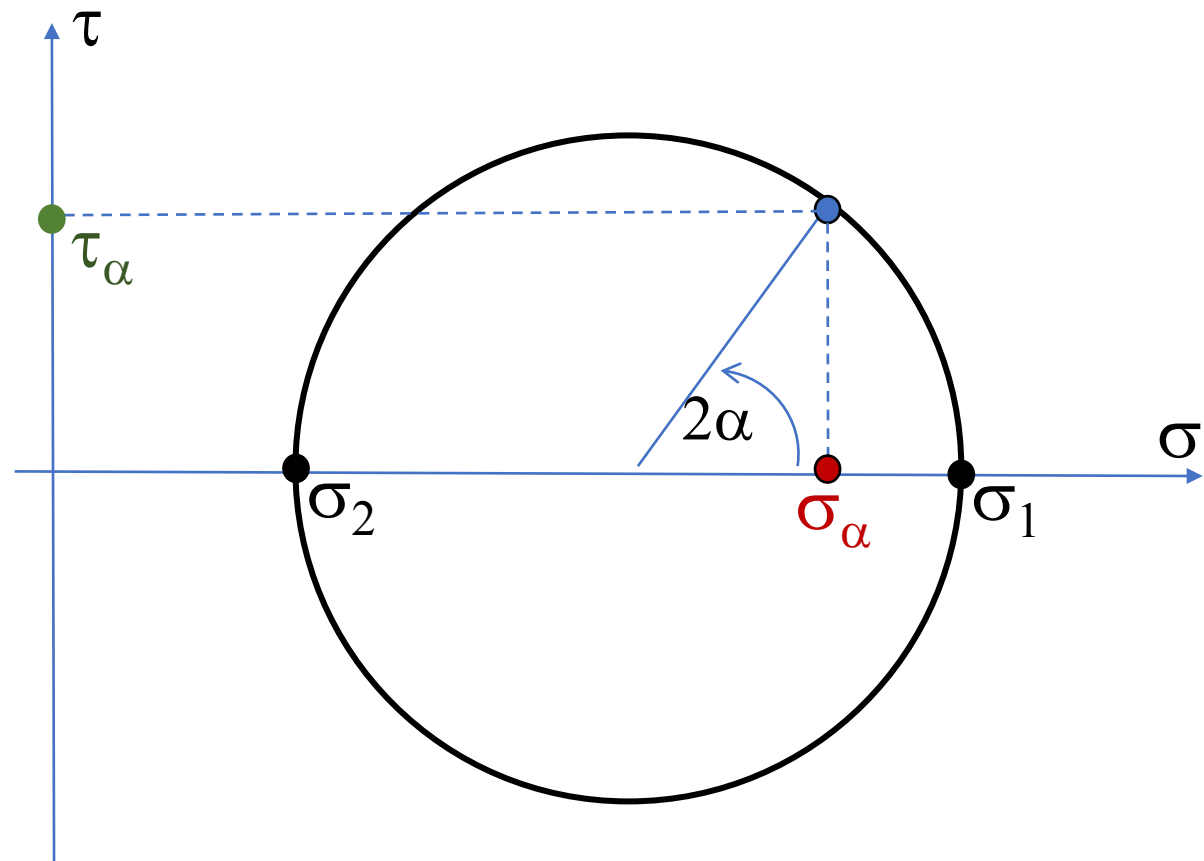
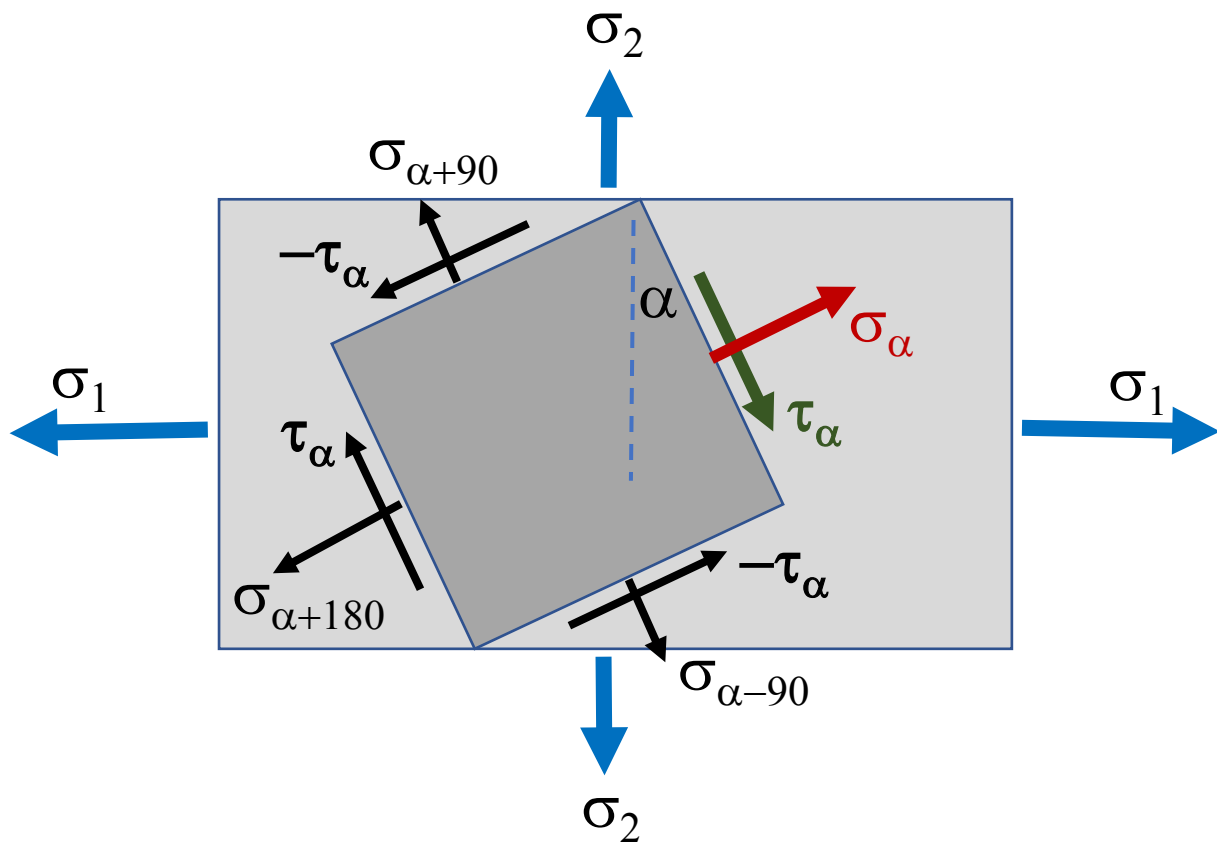


Wyznaczanie naprężeń w dowolnym przekroju



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$$

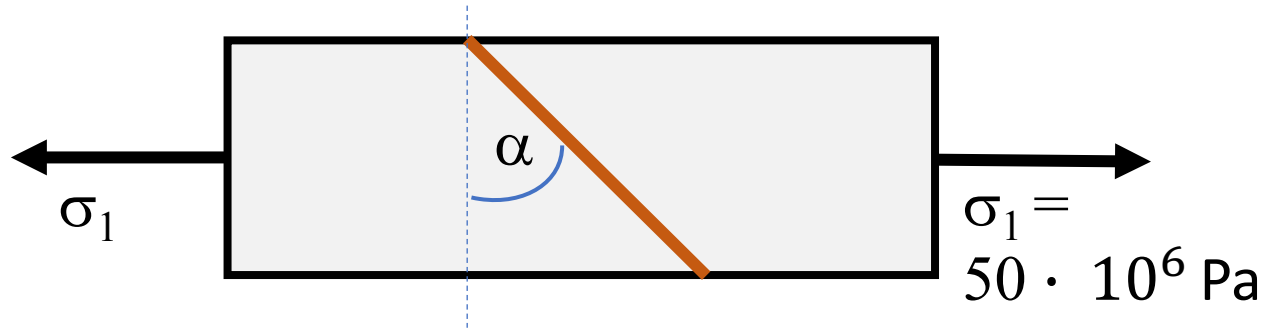
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

Sprawdzić naprężenia w połączeniu



Klej *loctite* – stal:

$$\alpha = 67,5^\circ$$

$$\sigma_{\text{dop}} = 15 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

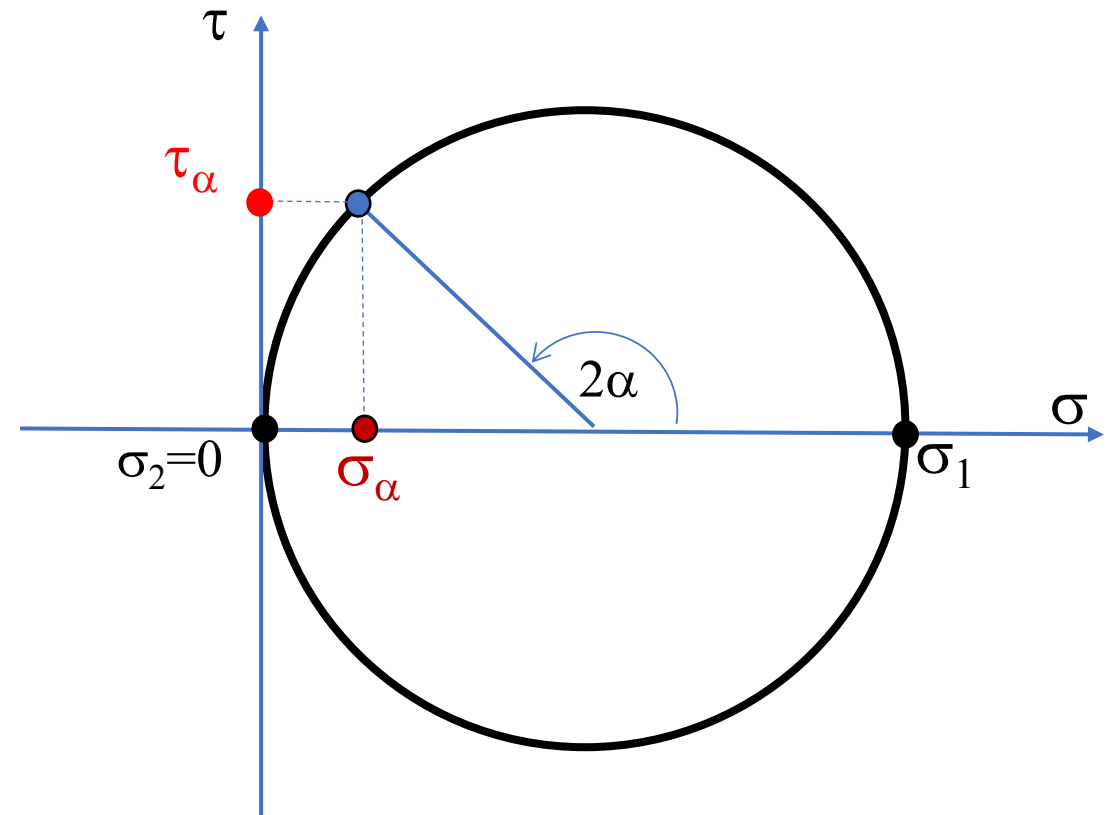
$$\tau_{\text{dop}} = 25 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

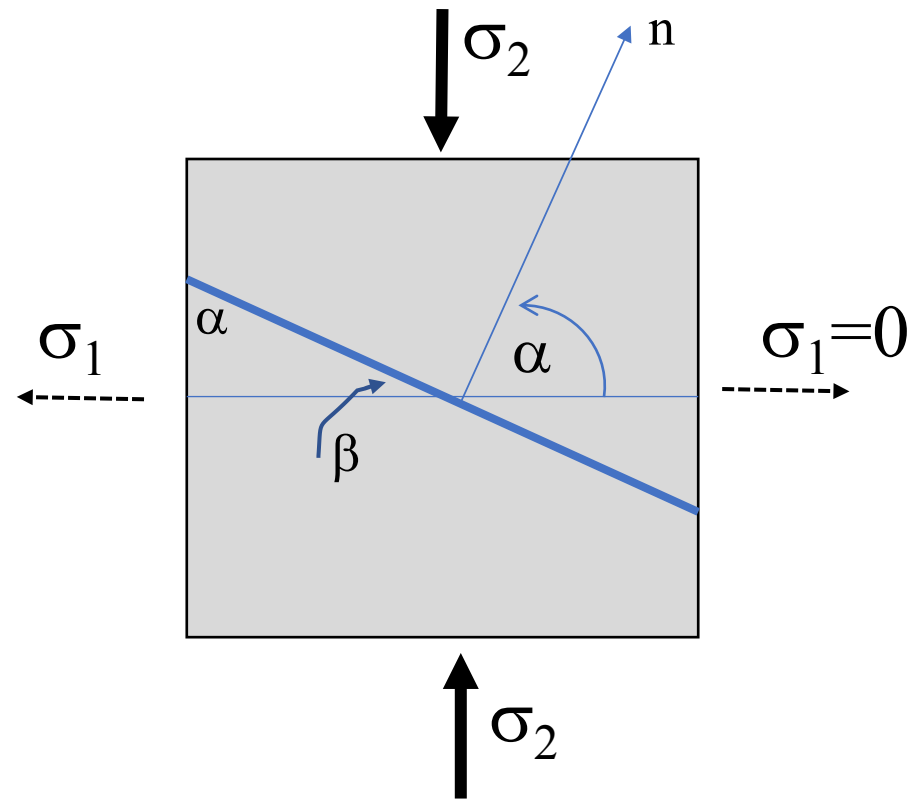
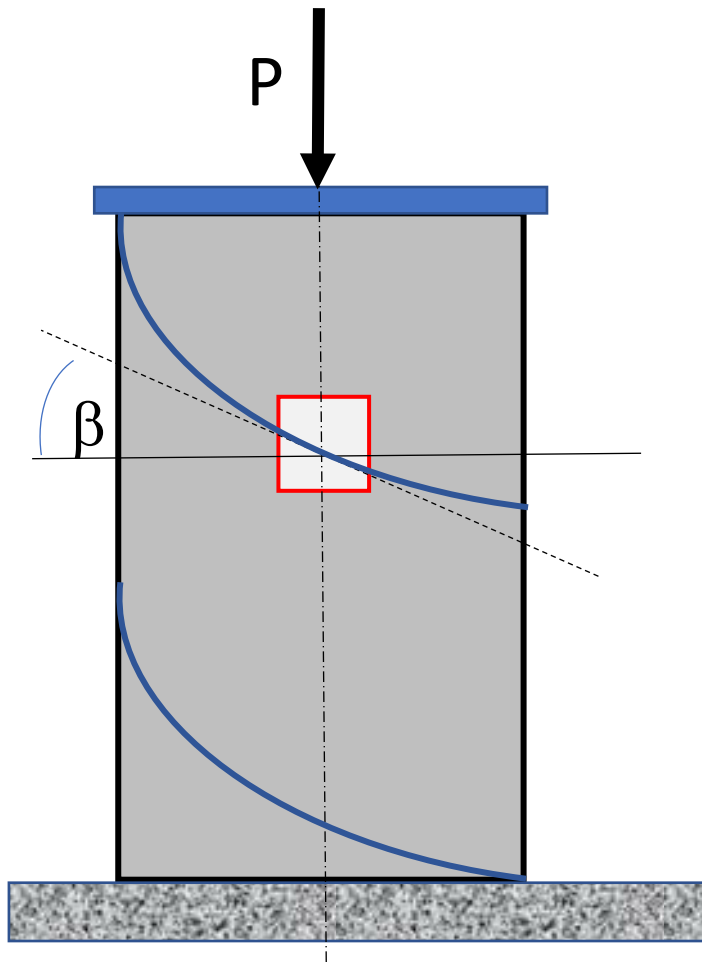
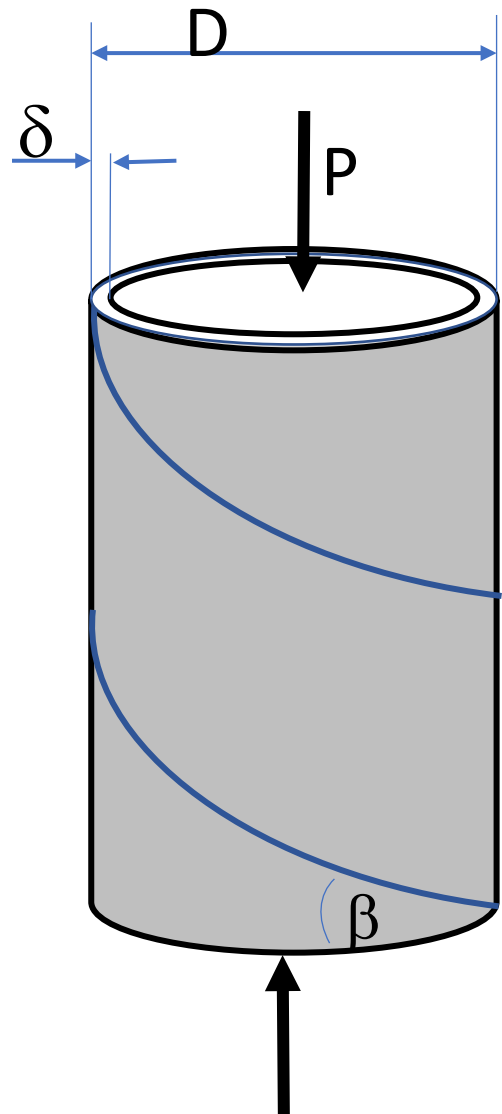
$$\sigma_\alpha = 7,3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_\alpha = 17,7 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

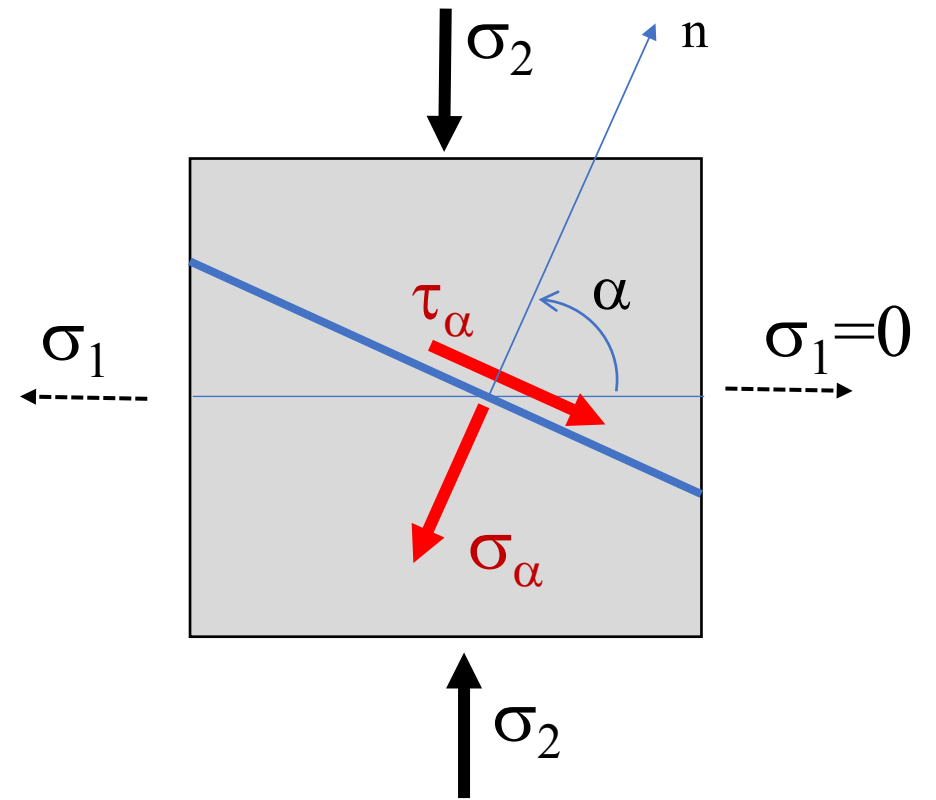
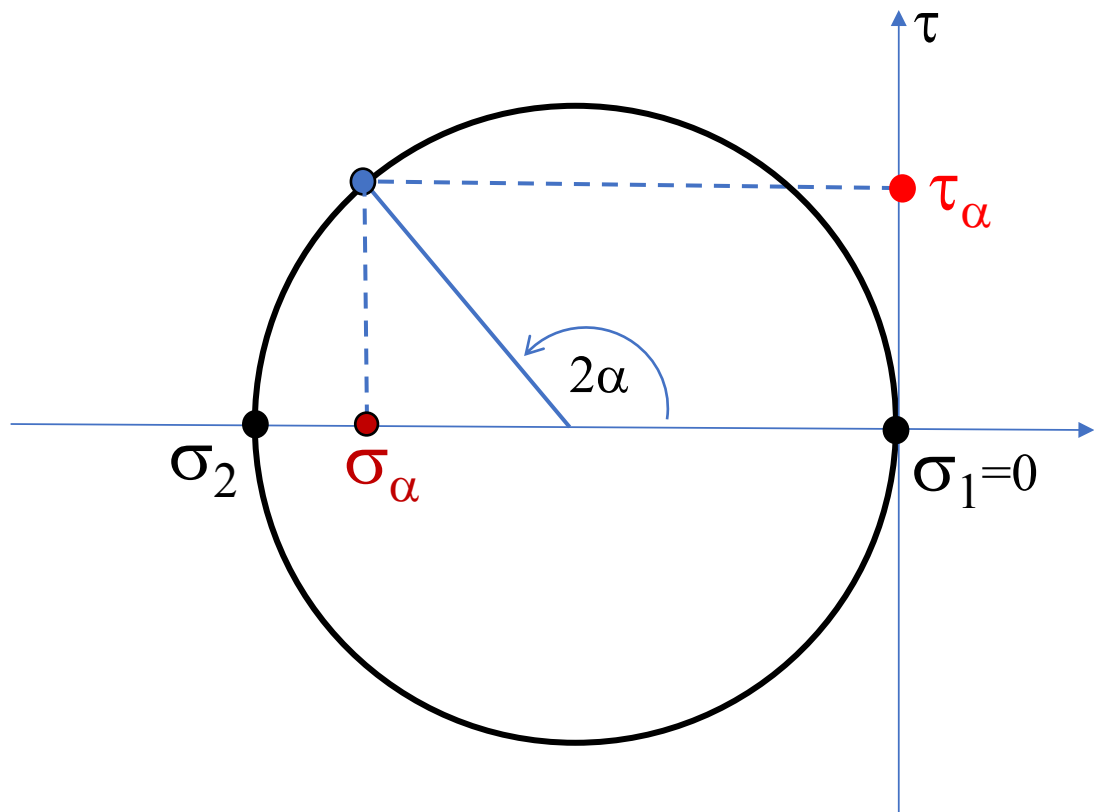




$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



$$P = -3 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$\delta = 0,006 \text{ m}$$

$$d = 0,3 \text{ m}$$

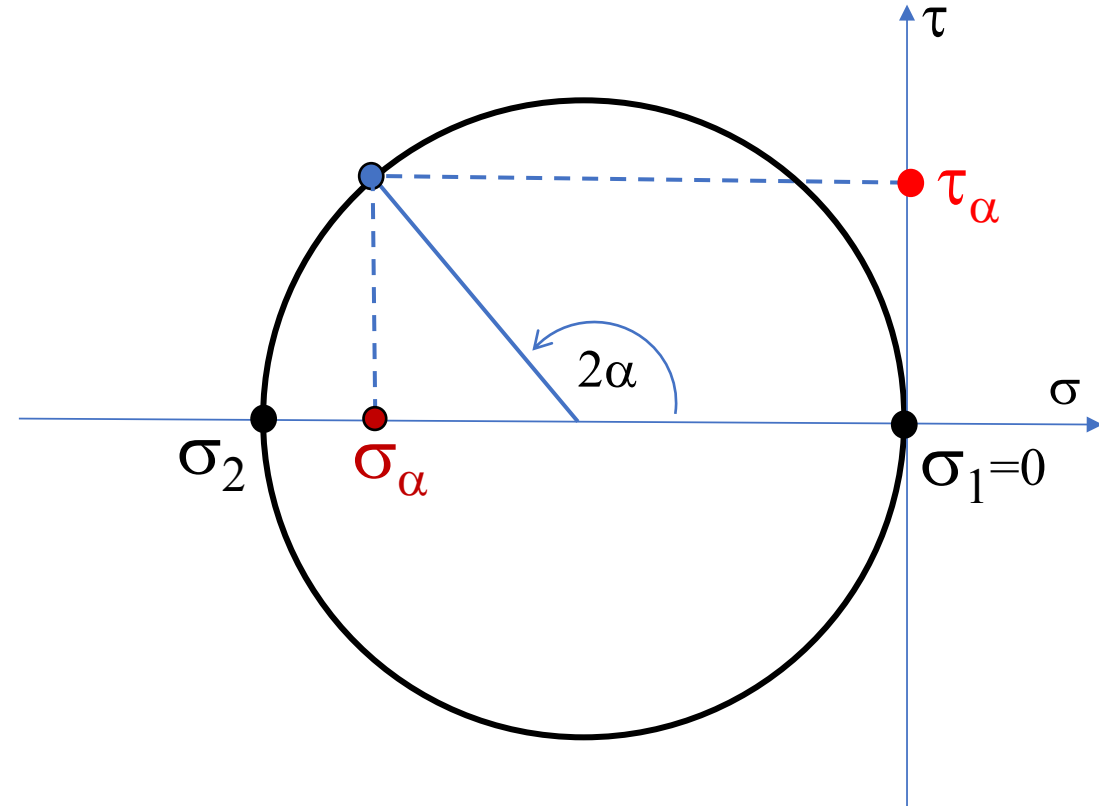
$$\alpha = 65^\circ$$

$$\sigma_{dop} = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{dop} = 30 \text{ MPa}$$

$$A = \pi d \delta = 0,00565 \text{ m}^2$$

$$\sigma_2 = -53,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

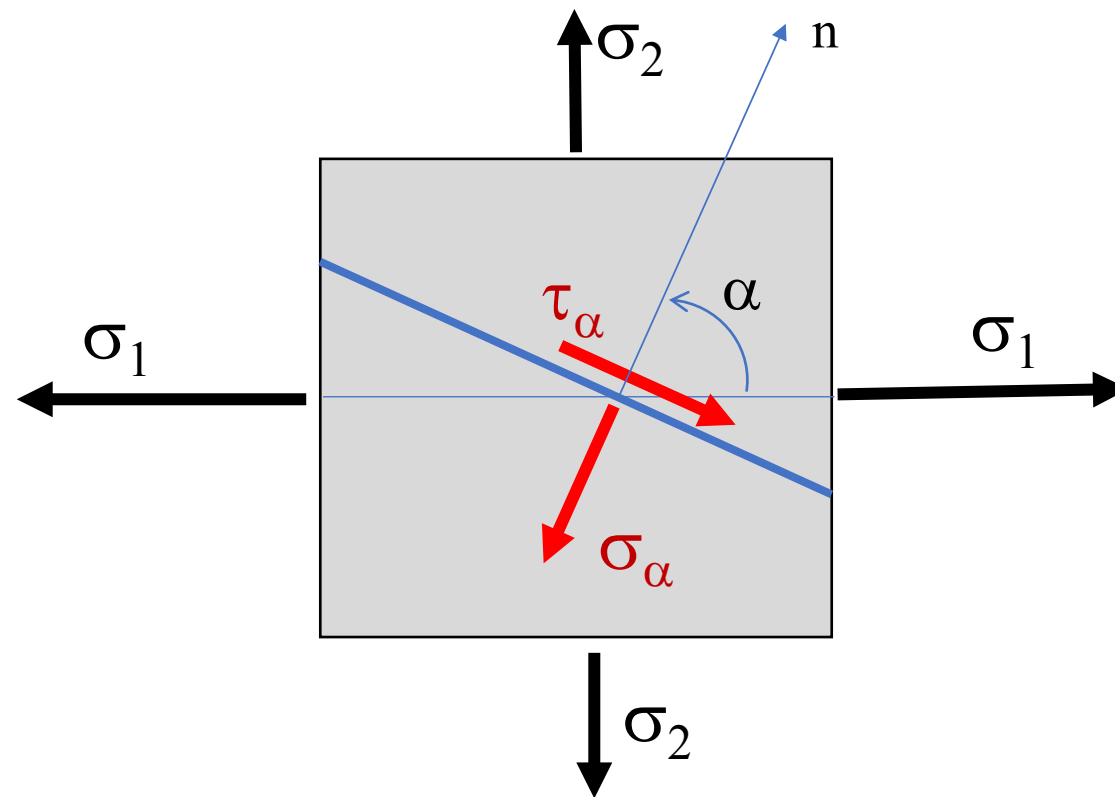
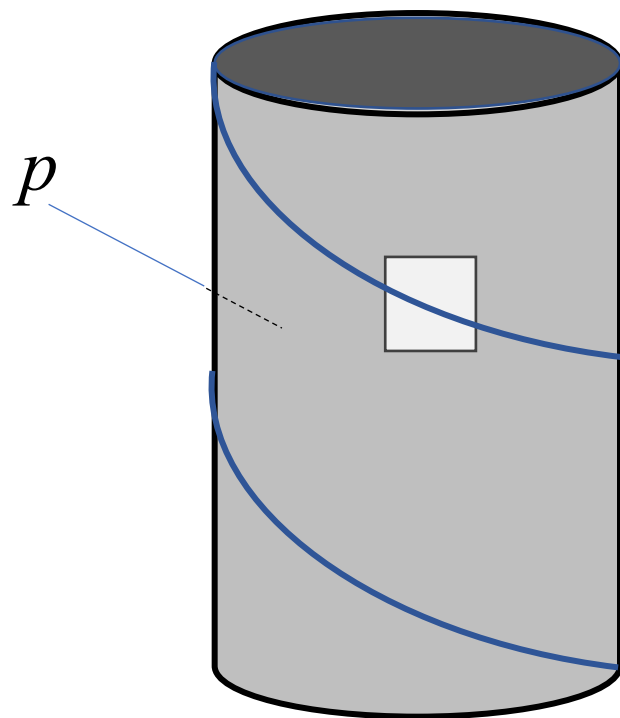
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha = -48,12 \cdot 10^6 \text{ Pa} \leq \sigma_{dop}$$

$$\tau_\alpha = 20,34 \cdot 10^6 \text{ Pa} \leq \tau_{dop}$$

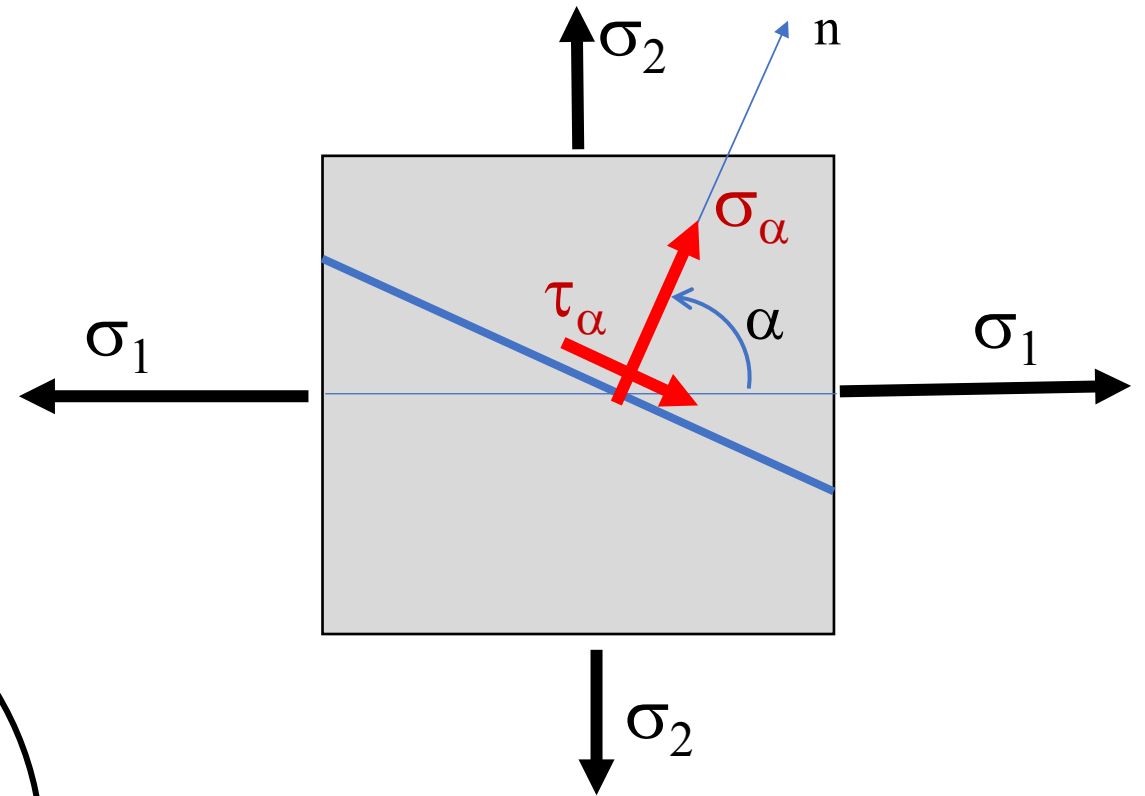
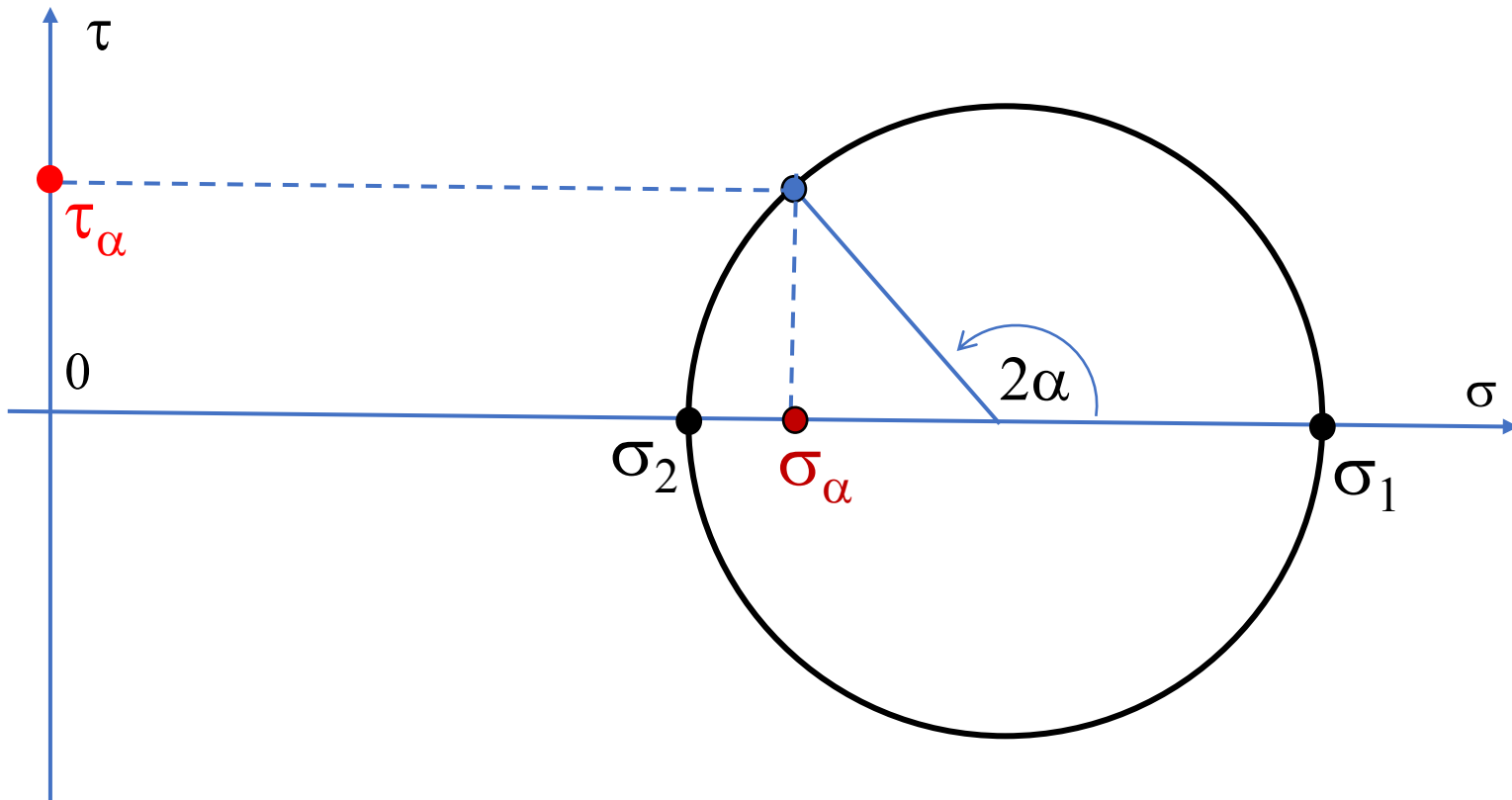


Wewnątrz rury (takiej jak w poprzednim zadaniu) panuje ciśnienie p .
Obliczyć naprężenia w spoinie.



$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



$$p = 3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\delta = 0,006 \text{ m}$$

$$d = 0,3 \text{ m}$$

$$\alpha = 65^\circ$$

$$\sigma_{dop} = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{dop} = 30 \text{ MPa}$$

$$A = \pi d \delta = 0,00565 \text{ m}^2$$

$$\sigma_1 = 75 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_2 = 37,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_1 = \frac{p d}{2 \delta}$$

$$\sigma_2 = \frac{p d}{4 \delta}$$



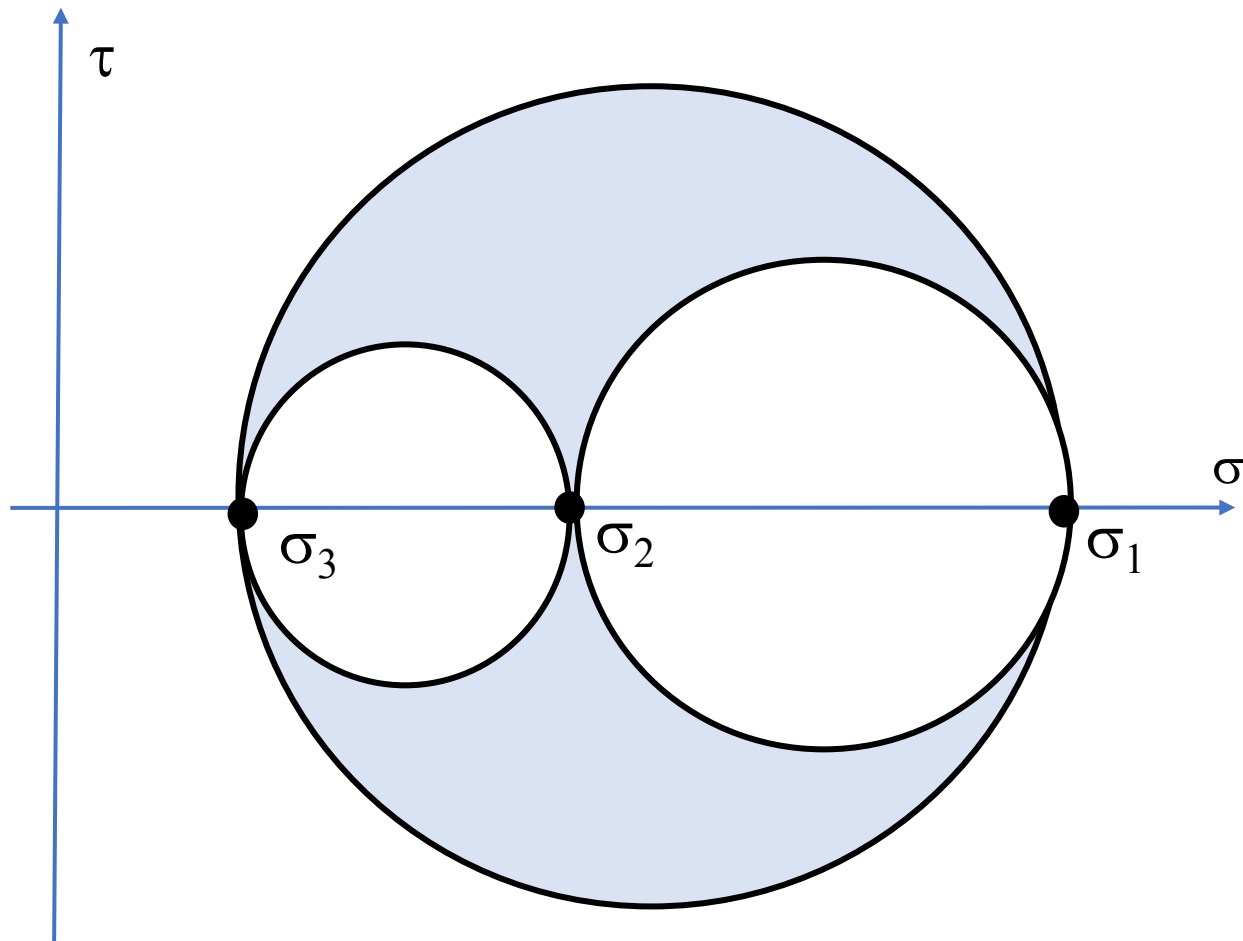
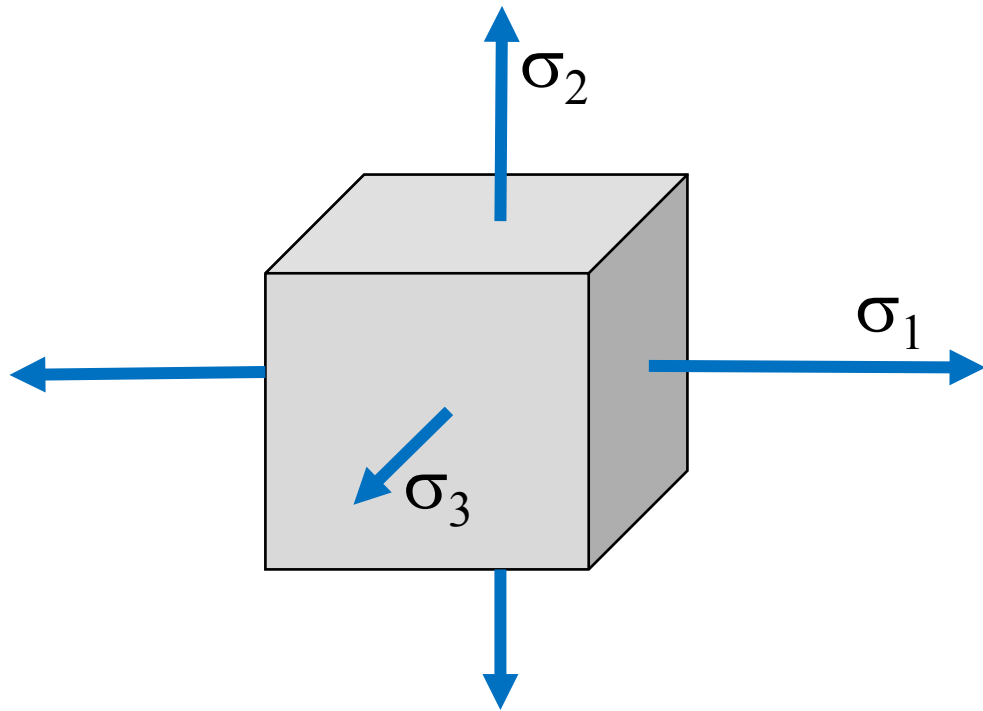
$$\sigma_\alpha = 44,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \leq \sigma_{dop}$$

$$\tau_\alpha = 14,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \leq \tau_{dop}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$



$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

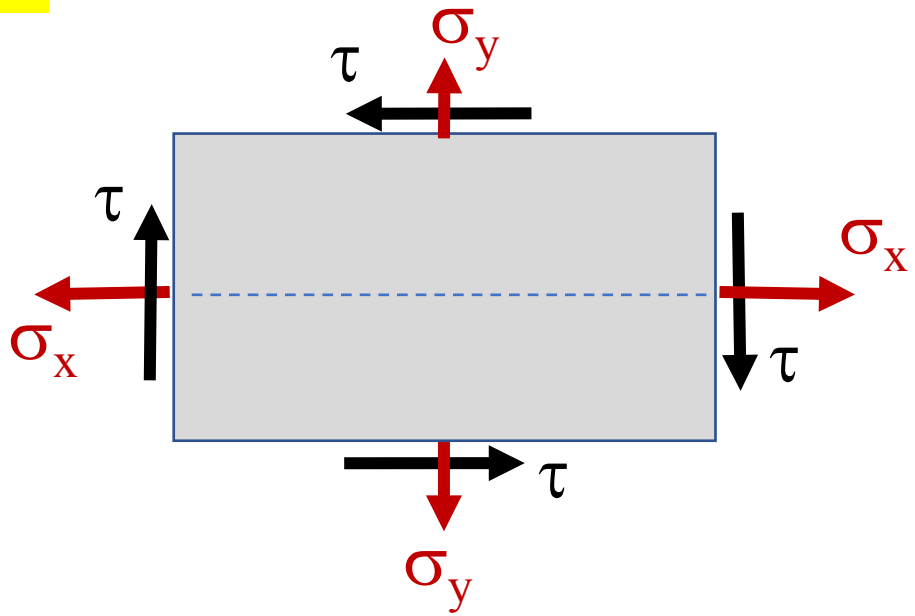


$$\sigma_{\max} = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = \sigma_{\min}$$

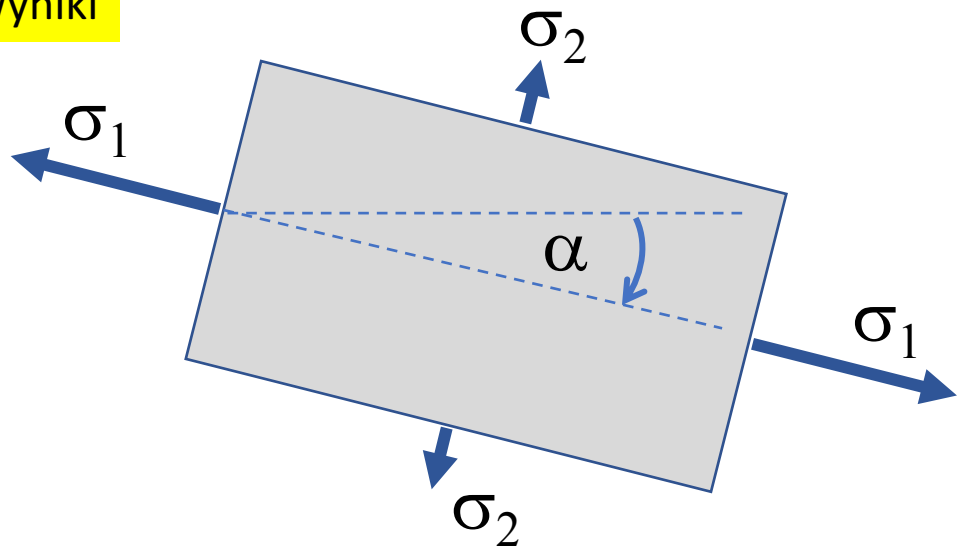
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

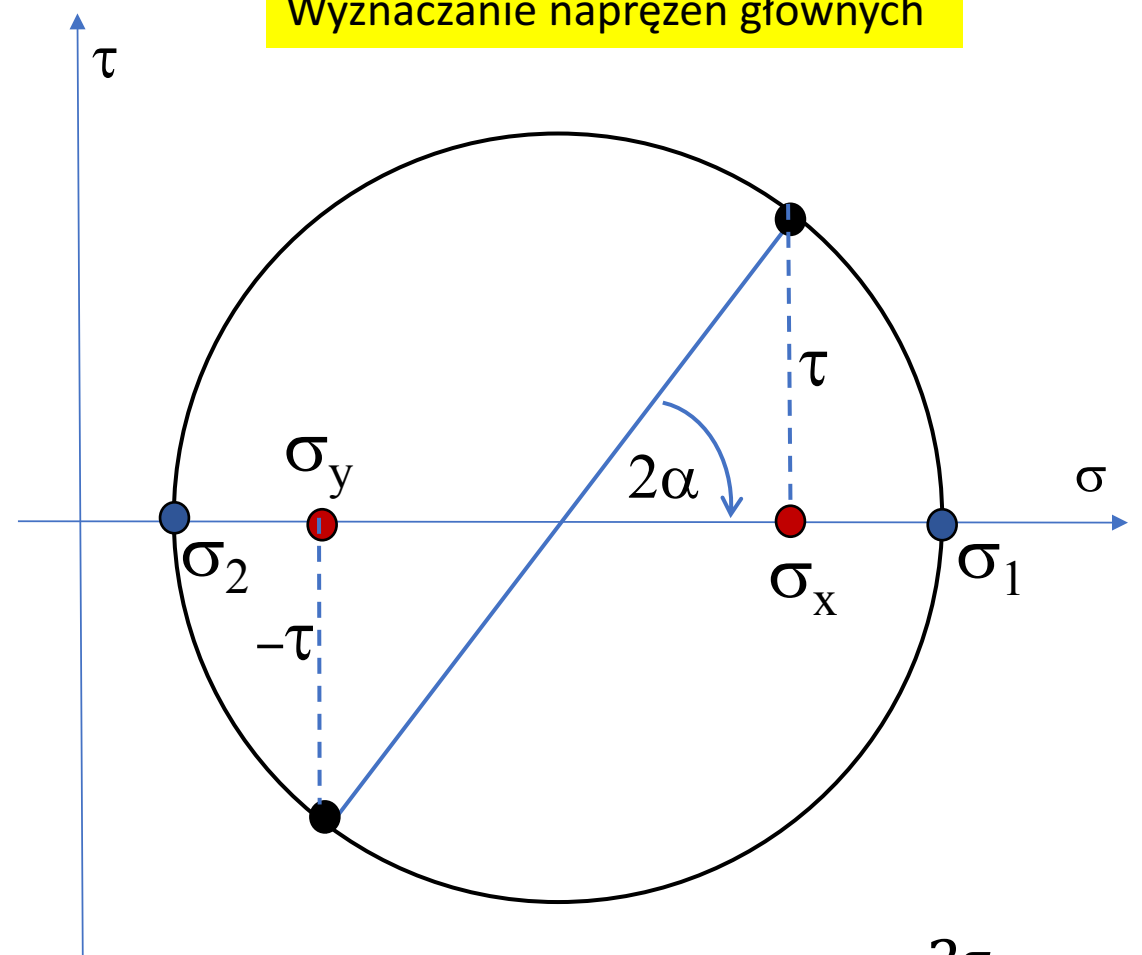
Dane



Wyniki



Wyznaczanie naprężeń głównych

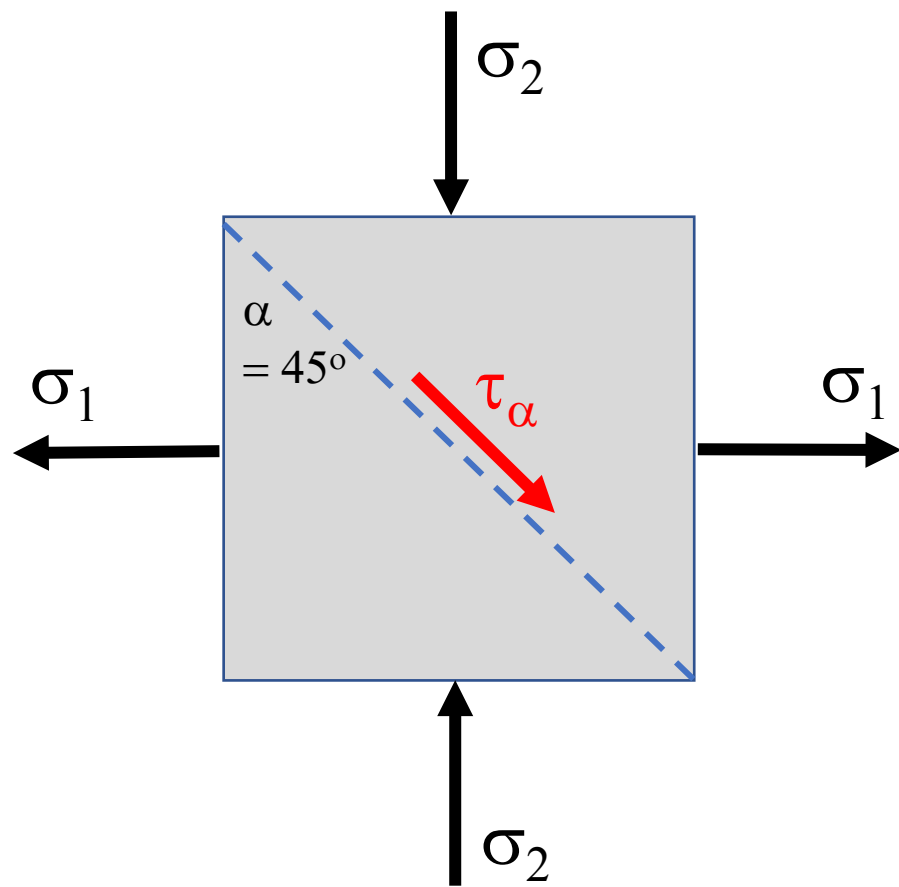


$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

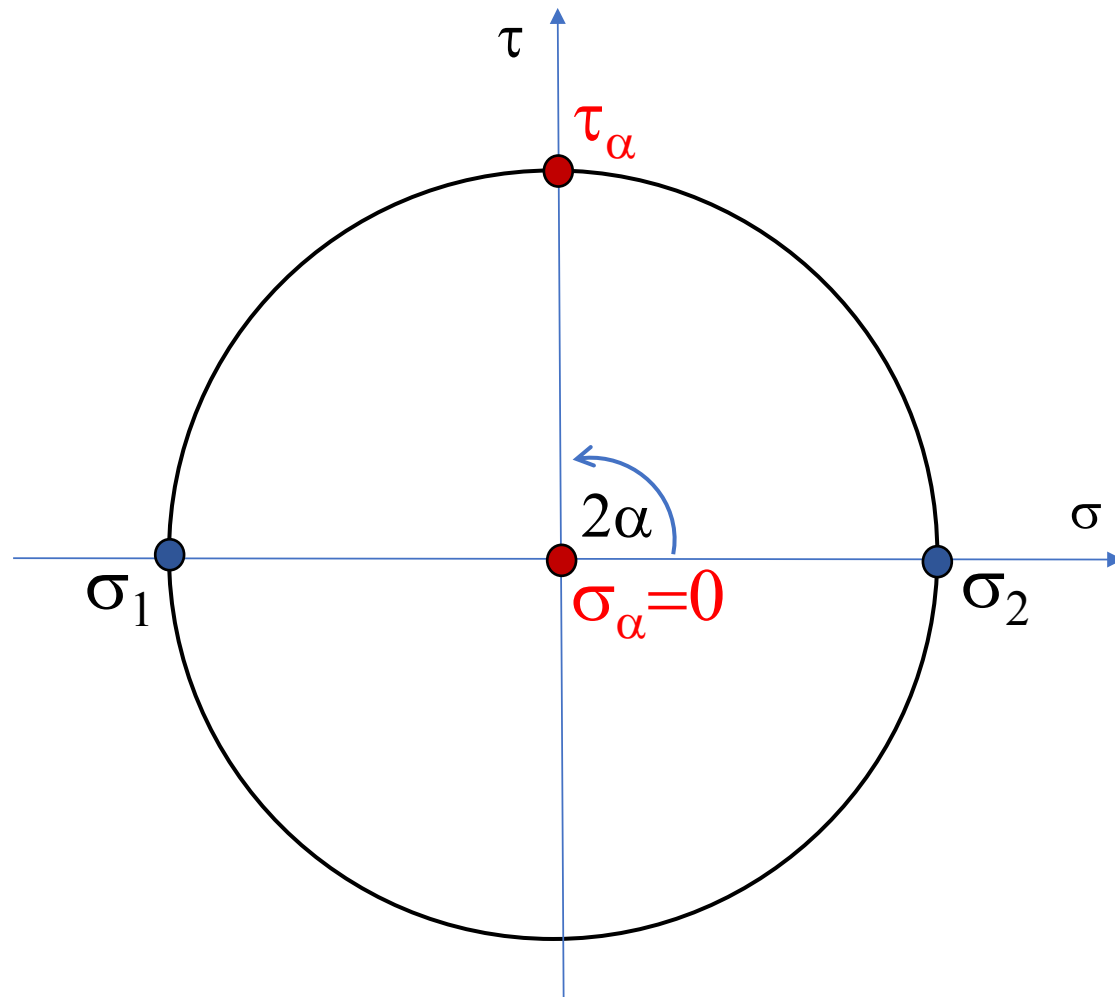
$$\alpha = 45^\circ$$

$$|\sigma_1| = |\sigma_2|$$



$$\sigma_\alpha = 0$$

$$|\tau_\alpha| = |\sigma_1| = |\sigma_2|$$

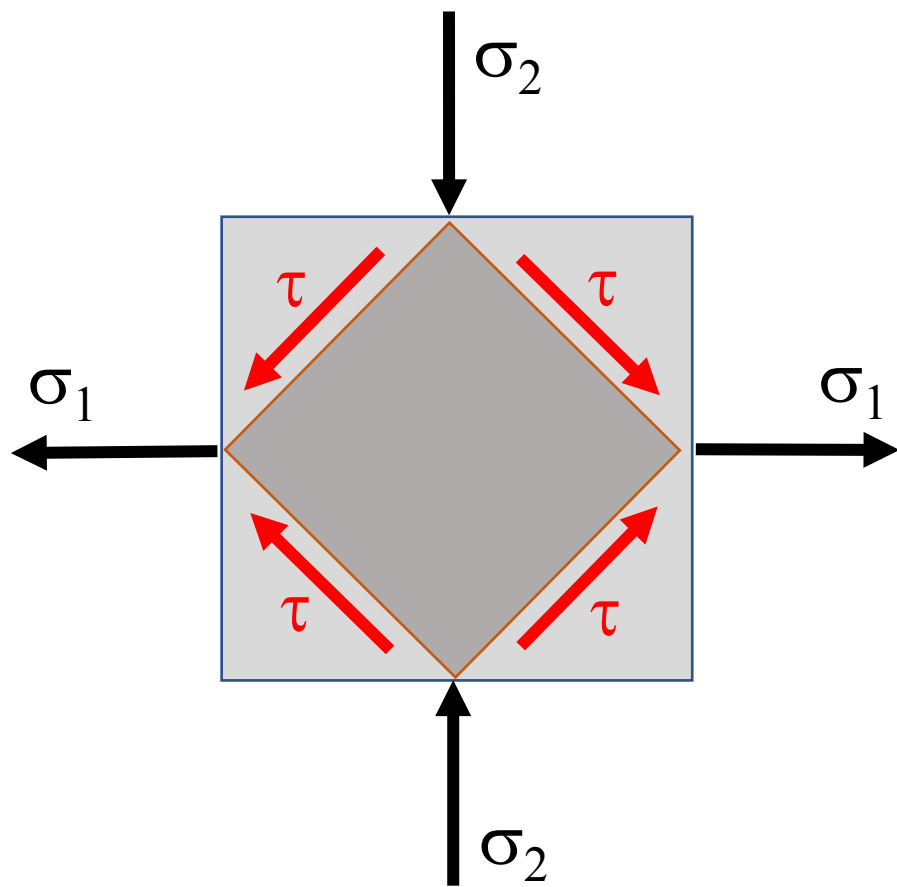


$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

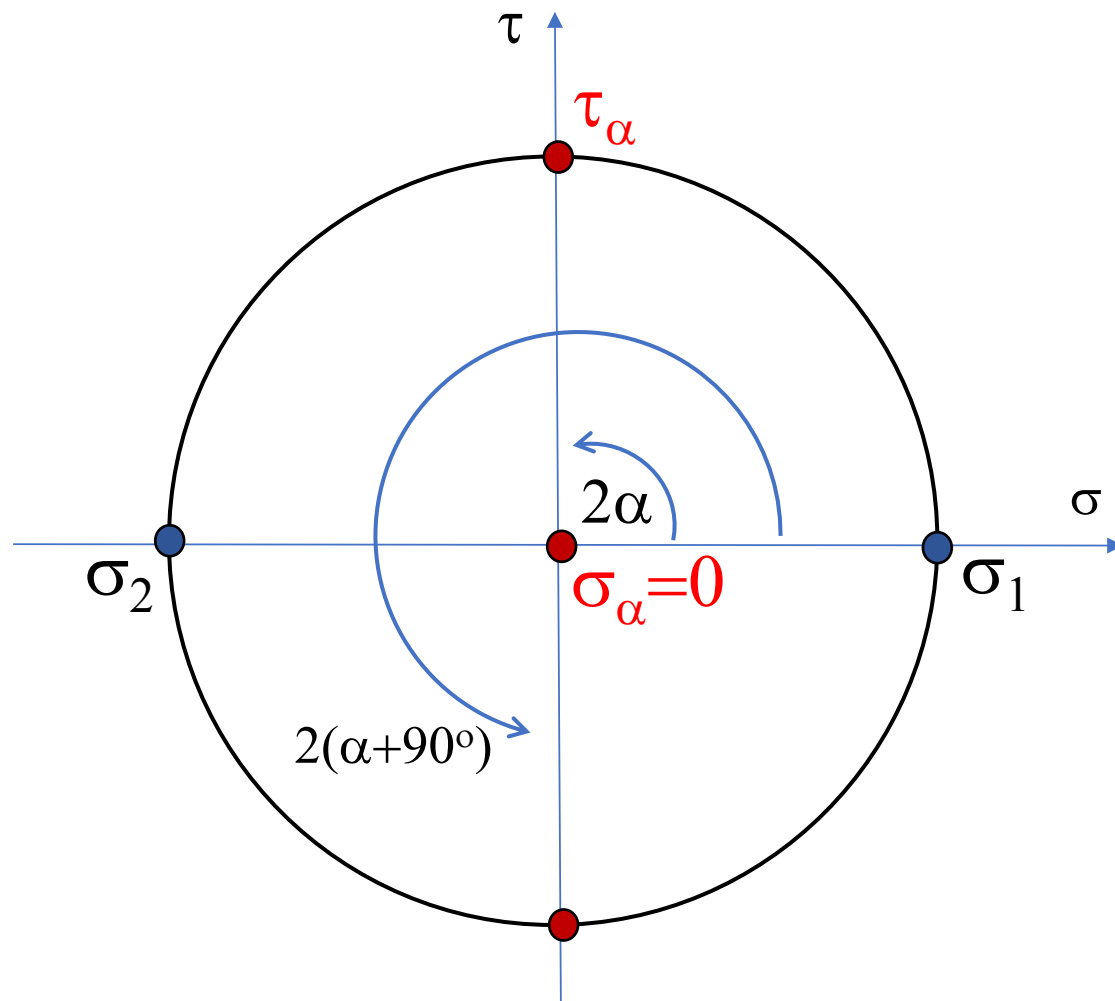
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$|\sigma_x| = |\sigma_y|$$

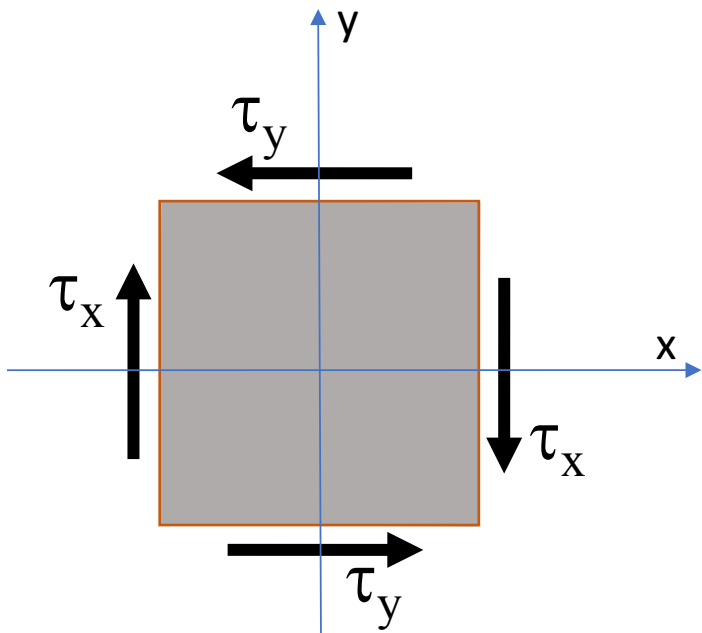


$$|\tau| = |\sigma_1| = |\sigma_2|$$



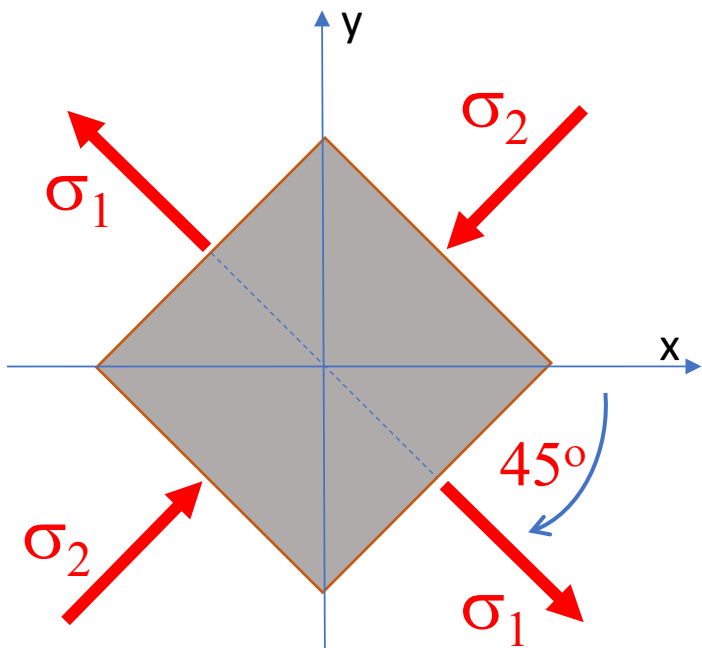
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



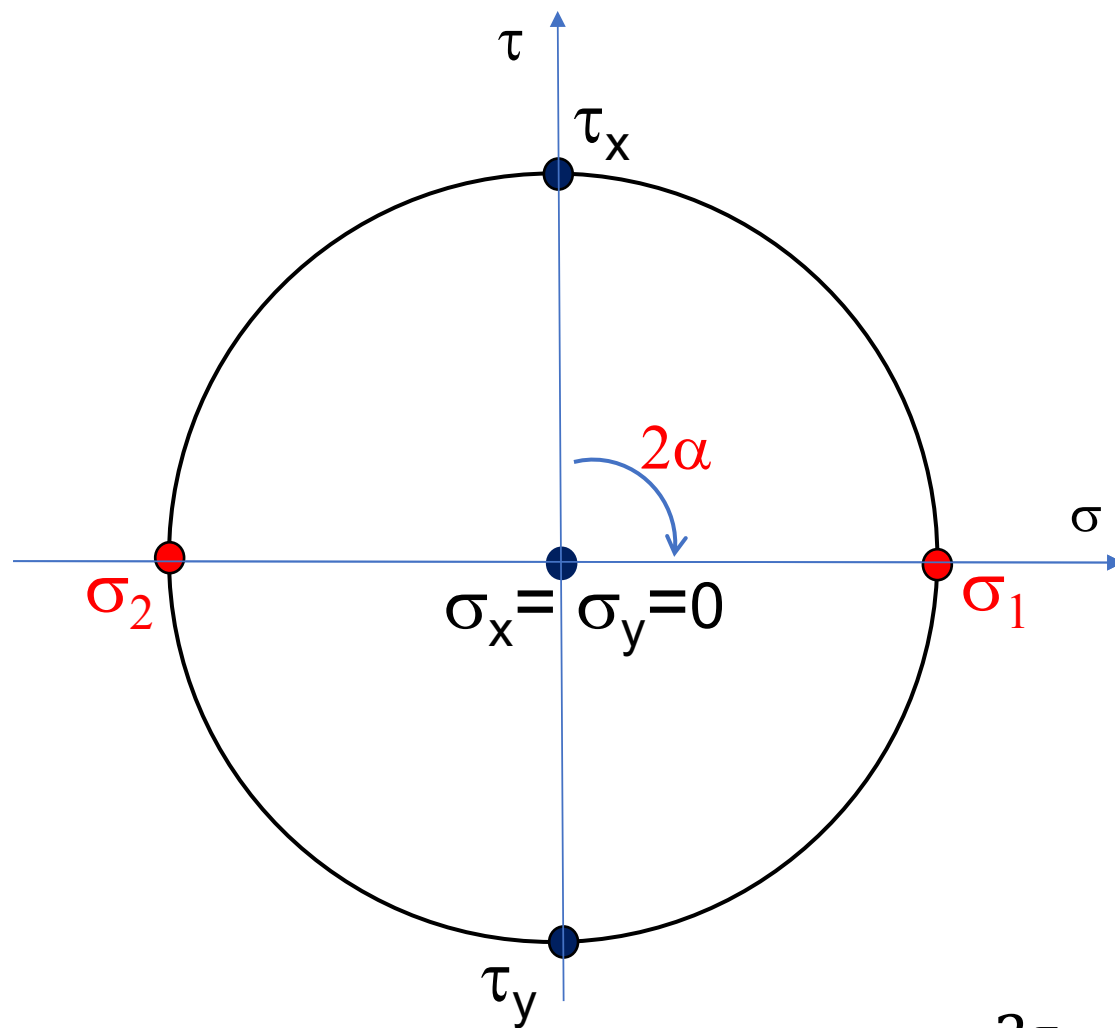
$$|\tau_x| = |\tau_y| = \tau$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$



$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_x$$

$$\alpha = 45^\circ$$



$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

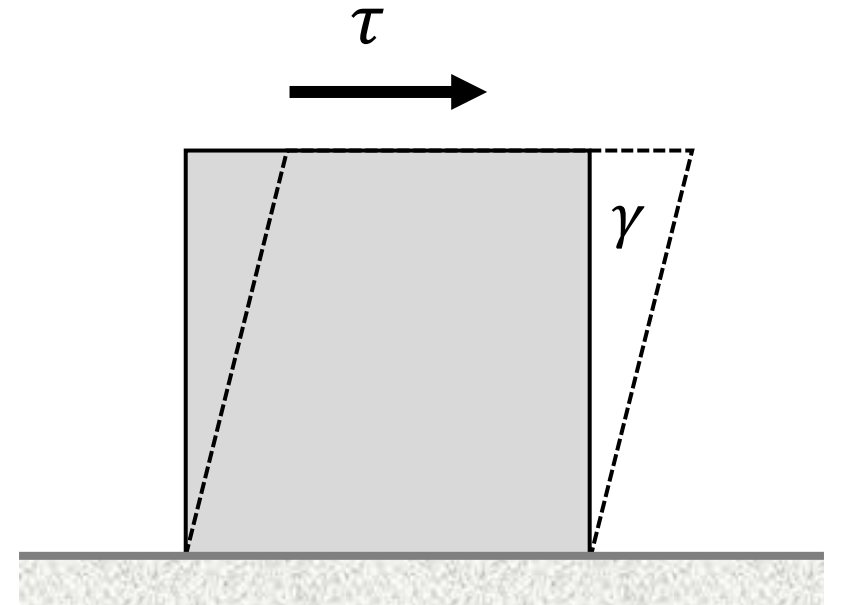
ANALIZA STANU ODKSZTAŁCEŃ





$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$0 \leq \nu \leq 0,5$$



$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$0 \leq \nu \leq 0,5$$

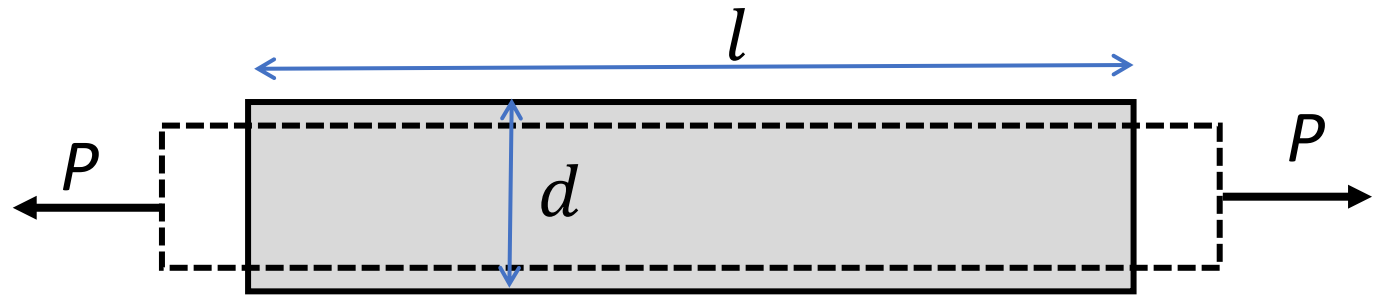
Liczba Poissona ν

Guma	0,5
Aluminium	0,33
Miedź	0,33
Stal	0,3
Żeliwo	0,24
Korek	0

$$\sigma_x = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = 159 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 0,0008$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -0,000225$$



$$P = 0,5 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$d = 0,02 \text{ m}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

$$E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\sigma_{dop} = 170 \text{ MPa}$$

$$\Delta l = l \varepsilon_x = 0,0016 \text{ m} = 1,6 \text{ mm}$$

$$\Delta d = d \varepsilon_z = -0,0000045 \text{ m} = -0,0045 \text{ mm} = -4,5 \mu\text{m}$$

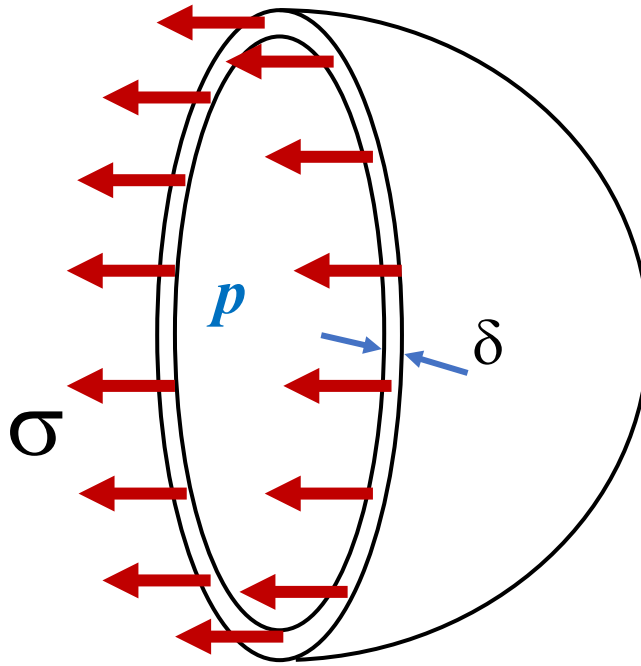
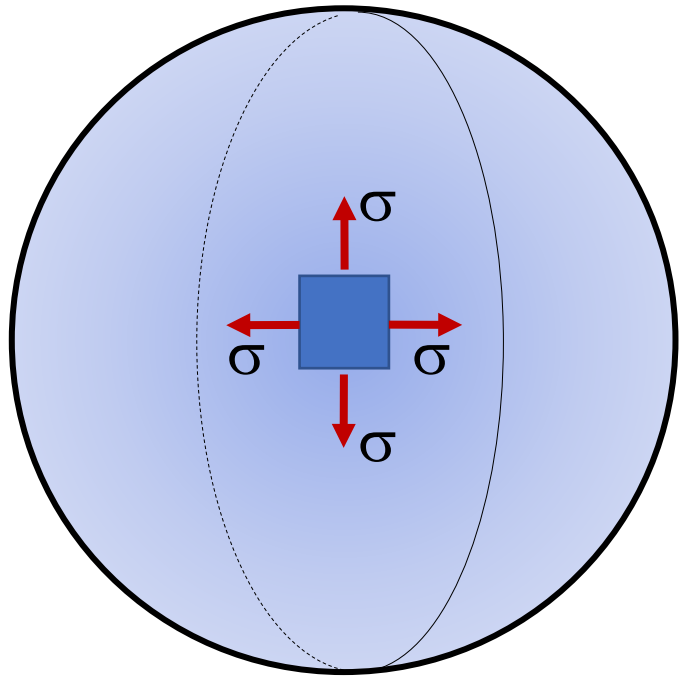
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\Delta l = ?$$

$$\Delta d = ?$$



d

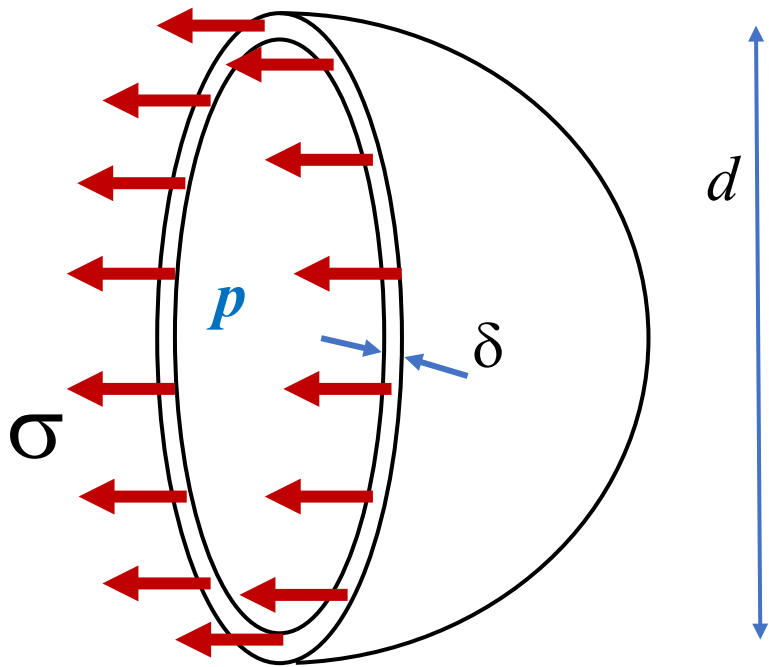
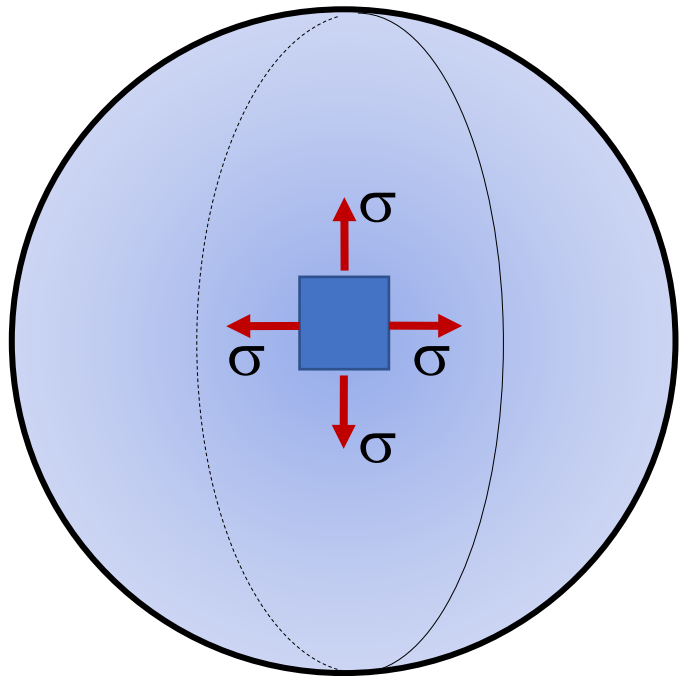
$$\sigma = \frac{p d}{4 \delta}$$

$d=2 \text{ m}$ $\Delta d=?$
 $\delta=0,01 \text{ m}$ $\Delta \delta=?$
 $p=2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
 $E=200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
 $\nu=0,3$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$



$$\sigma = \frac{p d}{4 \delta}$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \end{aligned}$$

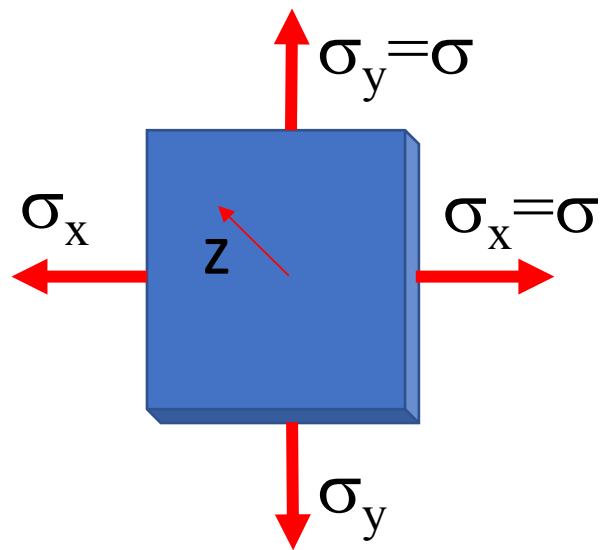
$$d = 2 \text{ m} \quad \Delta d = ?$$

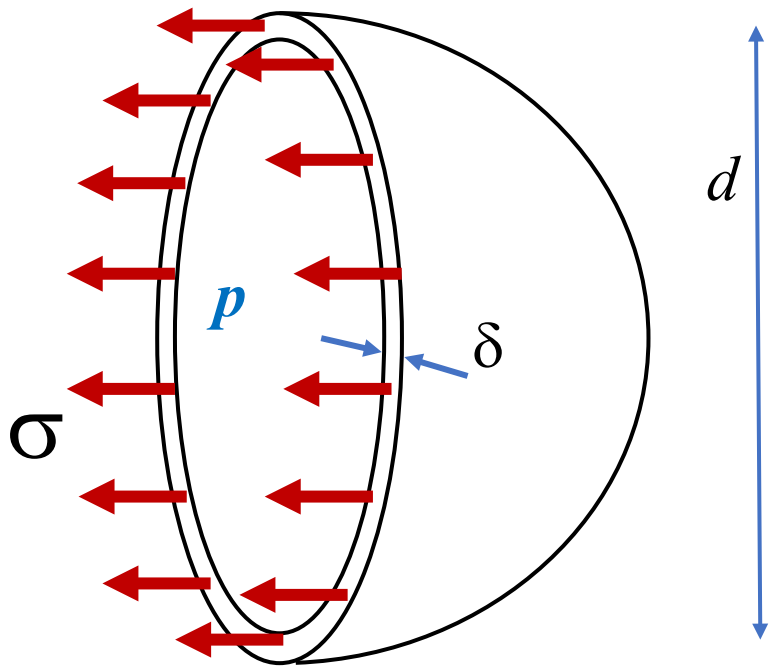
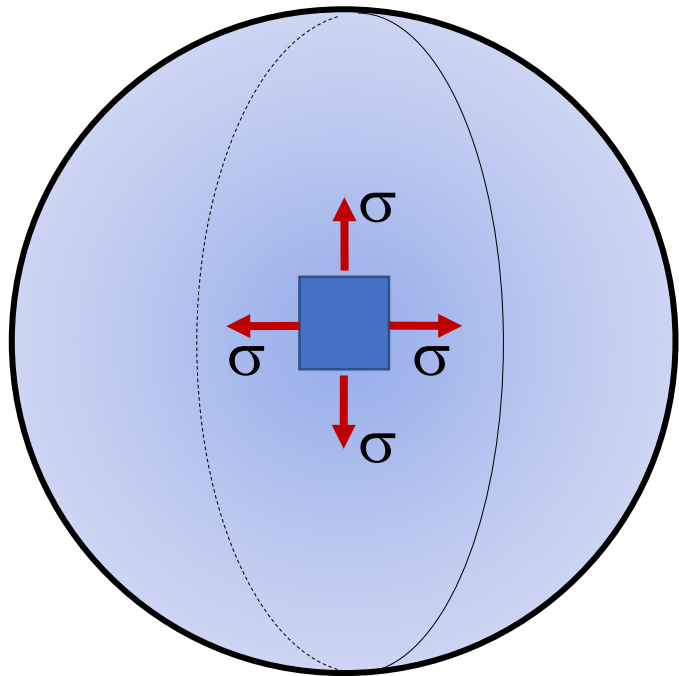
$$\delta = 0,01 \text{ m} \quad \Delta \delta = ?$$

$$p = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu = 0,3$$



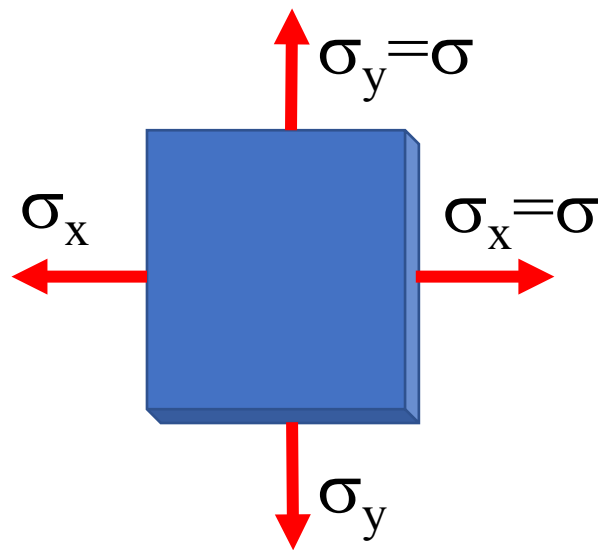


$$\sigma = \frac{p d}{4 \delta}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$$

$d=2 \text{ m}$
 $\delta=0,01 \text{ m}$
 $p=2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
 $E=200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
 $\nu=0,3$

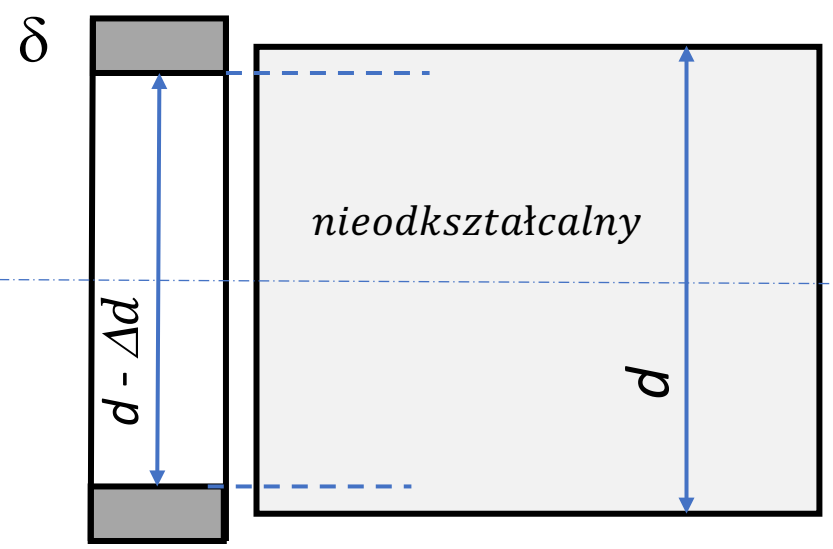
$\Delta d = \varepsilon d = 0,07 \text{ mm}$
 $\Delta \delta = \varepsilon_z \delta = 0,3 \mu\text{m}$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$



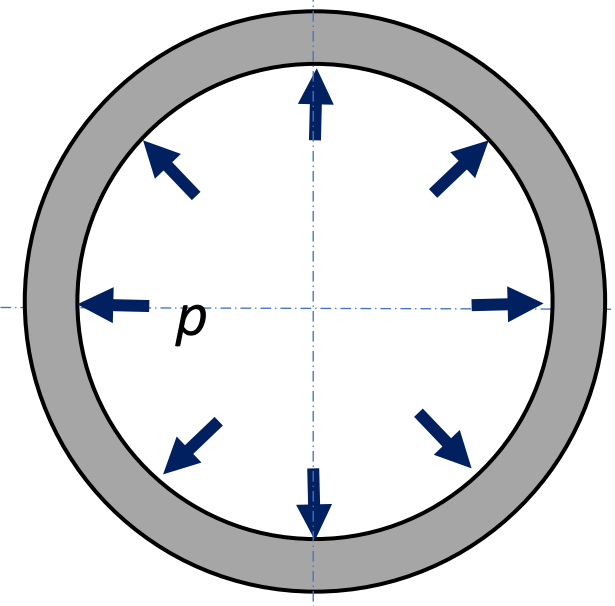
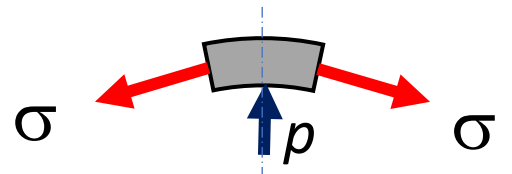
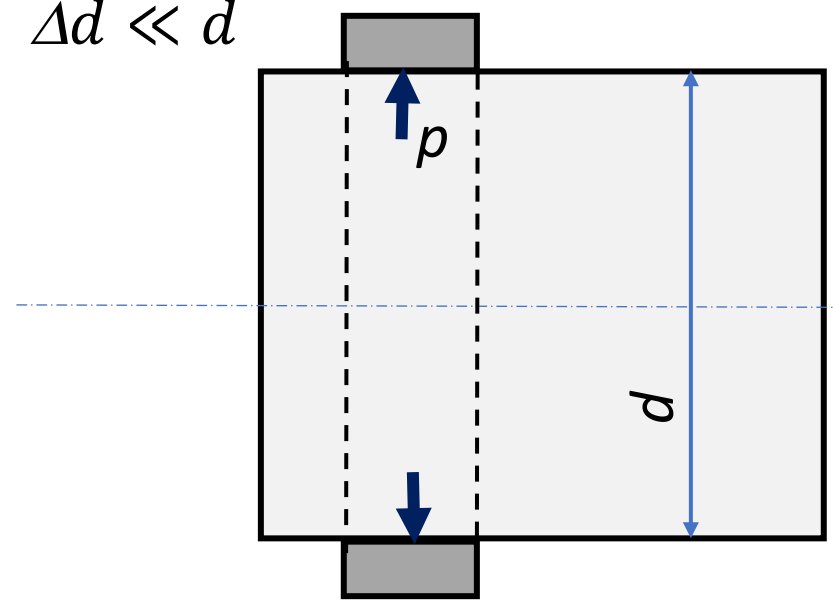
$$\Delta d = \lambda d \Delta T \quad \rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d} = \lambda \Delta T$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\delta \ll d$$

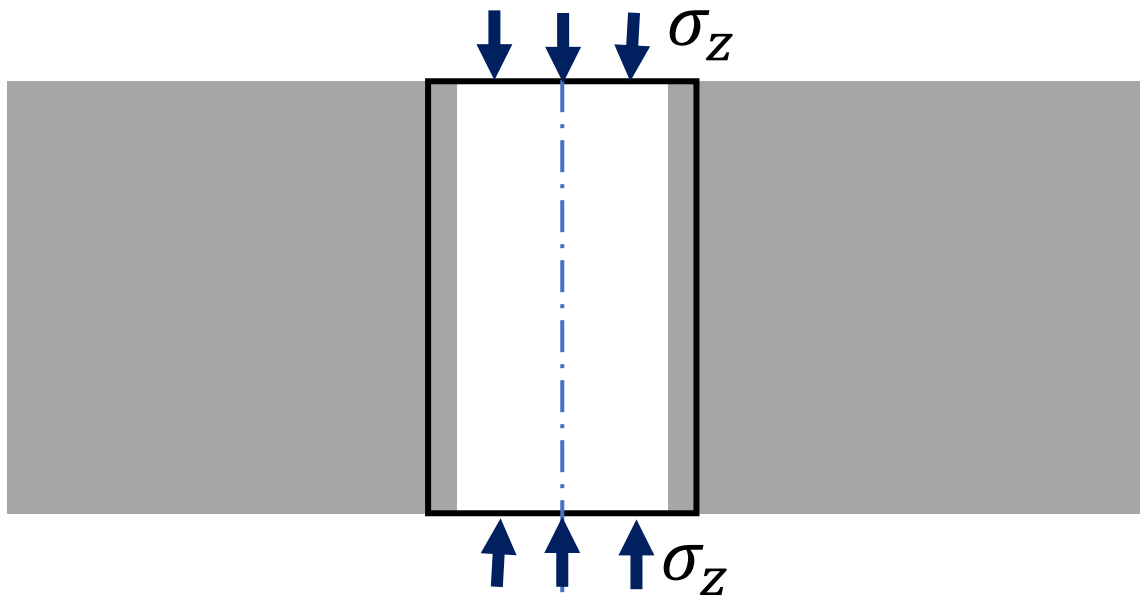
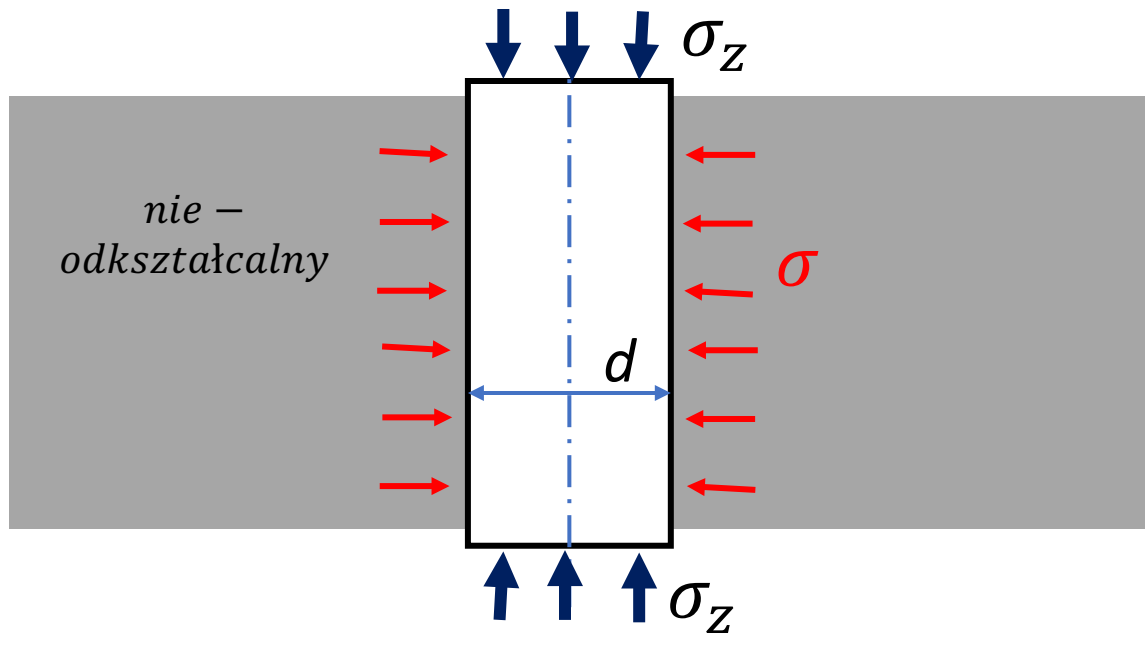
$$\Delta d \ll d$$



$$\sigma = E \lambda \Delta T$$

$$\sigma = \frac{p d}{2 \delta}$$

$$p = \frac{2 E \lambda \Delta T \delta}{d}$$



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$$

$$0 = \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

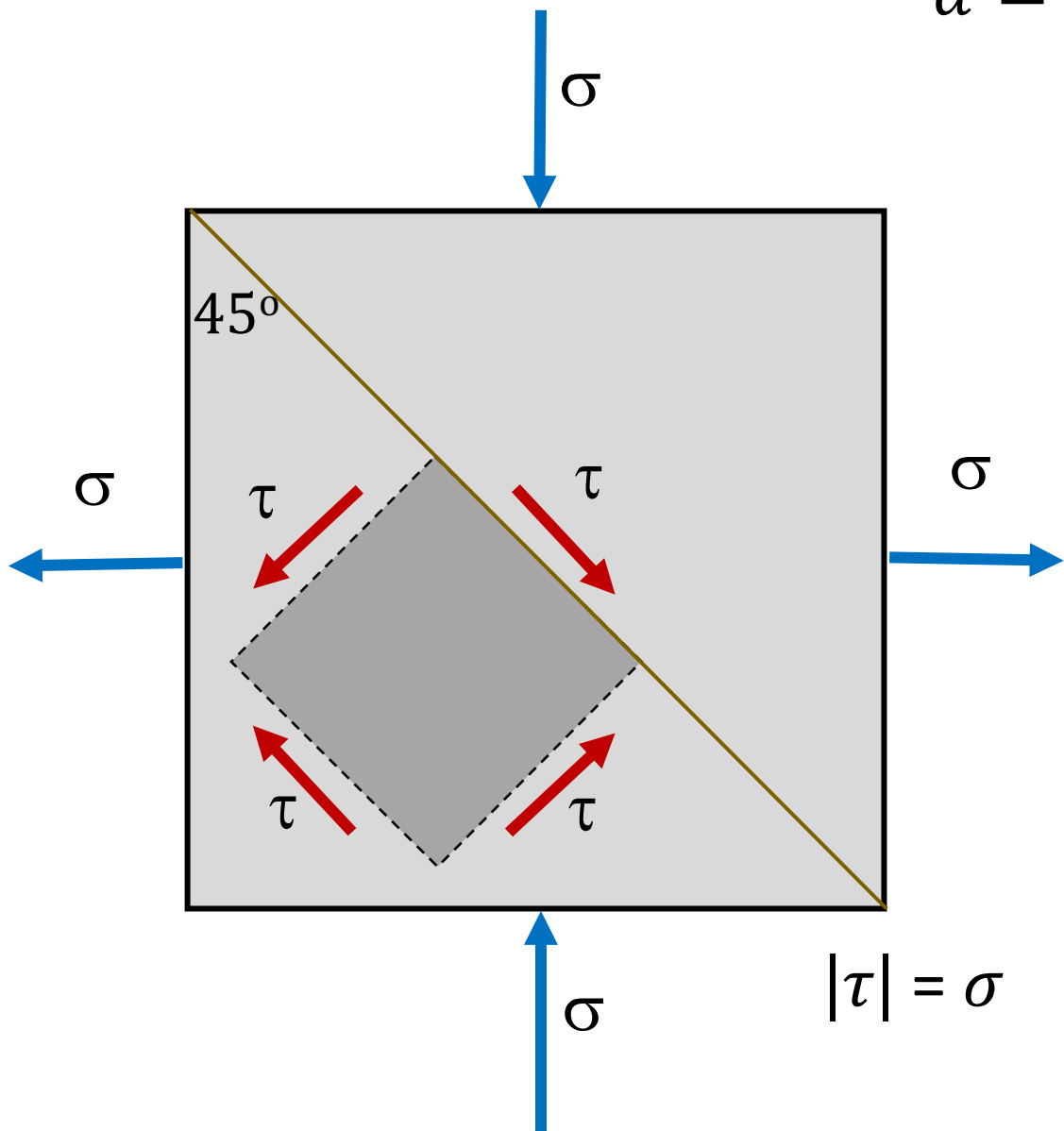
$$\sigma = \frac{\nu \sigma_z}{1 - \nu}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

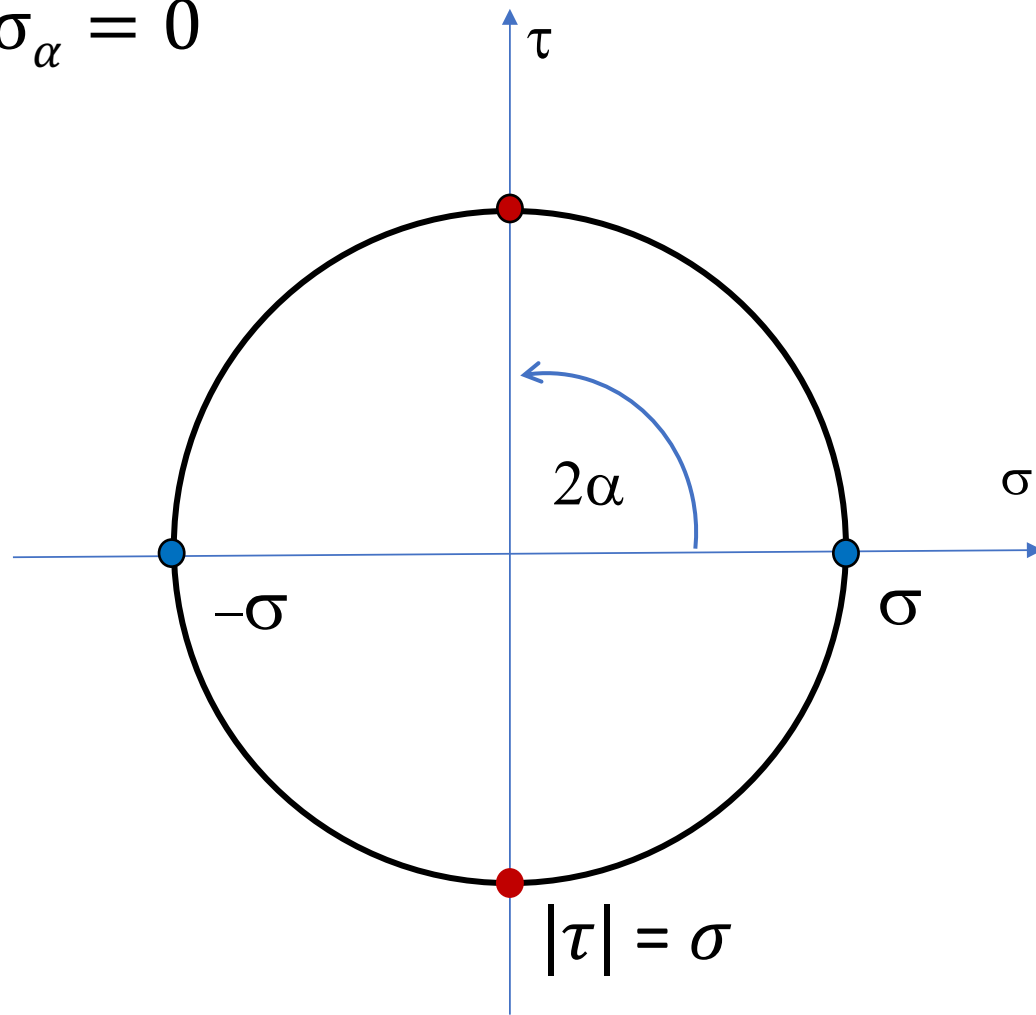
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Czyste ścinanie



$$\tau_\alpha = \sigma$$
$$\sigma_\alpha = 0$$



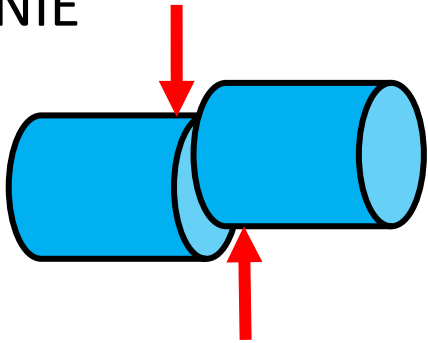
WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

SKRĘCANIE

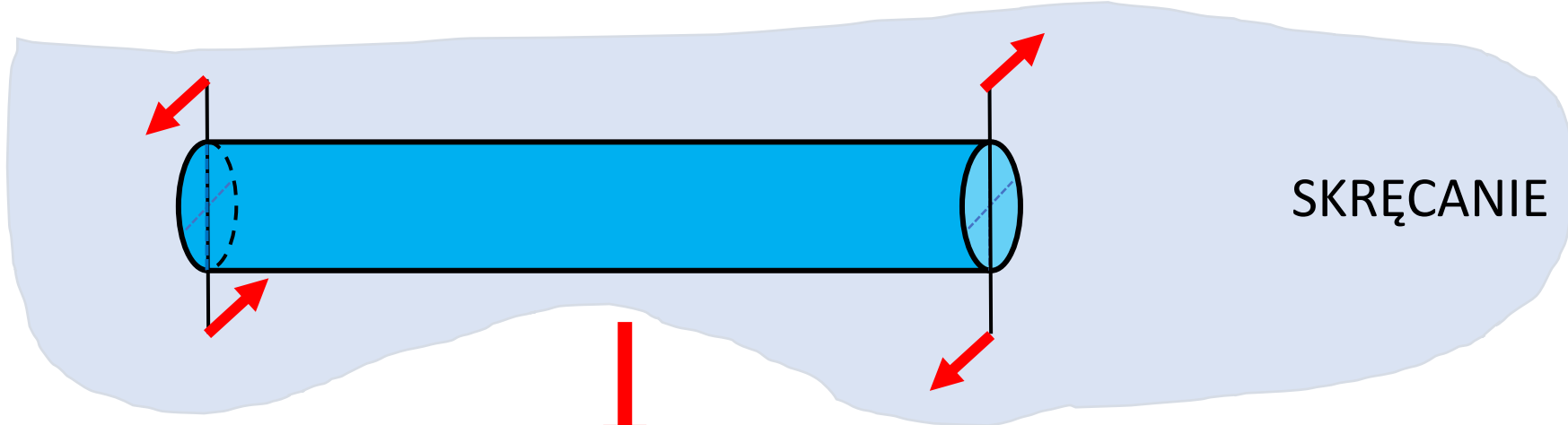


**PROSTE
PRZYPADKI
OBCIĄŻENIA**

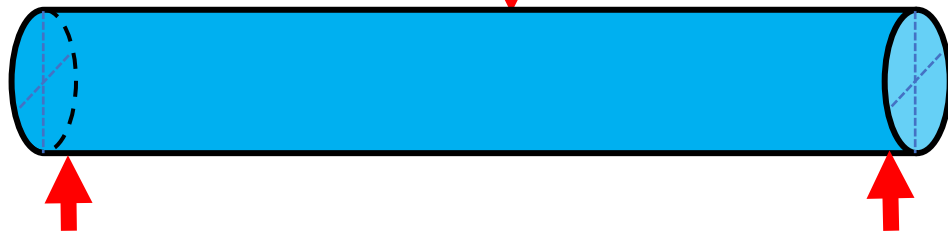
ŚCINANIE



ROZCIĄGANIE
(ŚCISKANIE)



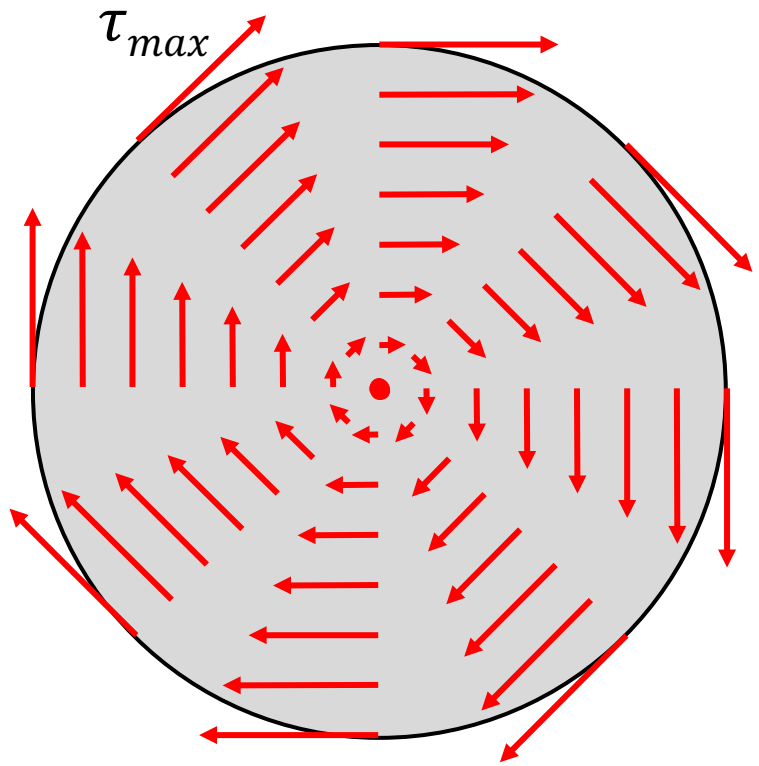
SKRĘCANIE



ZGINANIE

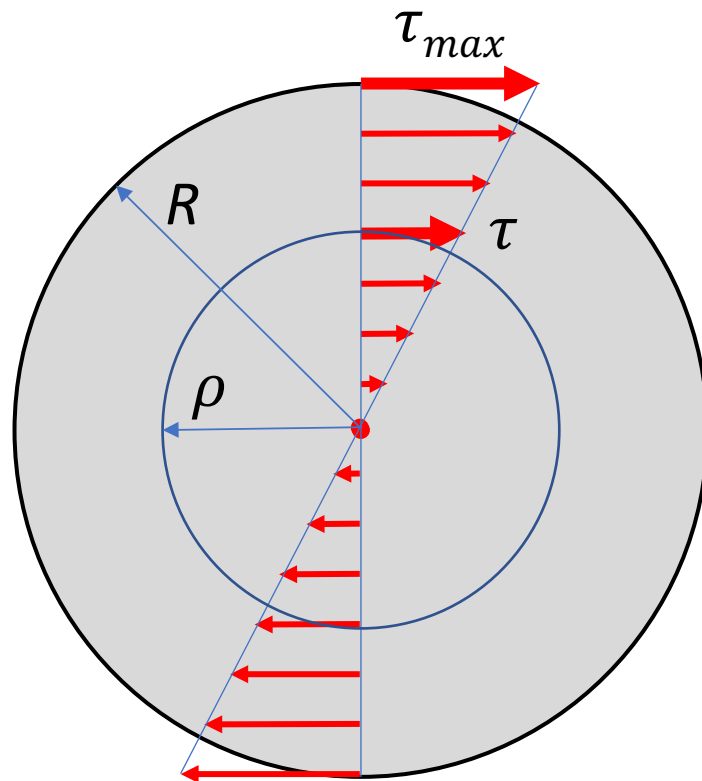


ZGINANIE



$$J_0 = \int_F \rho^2 dA$$

$$W_0 = \frac{J_0}{R}$$



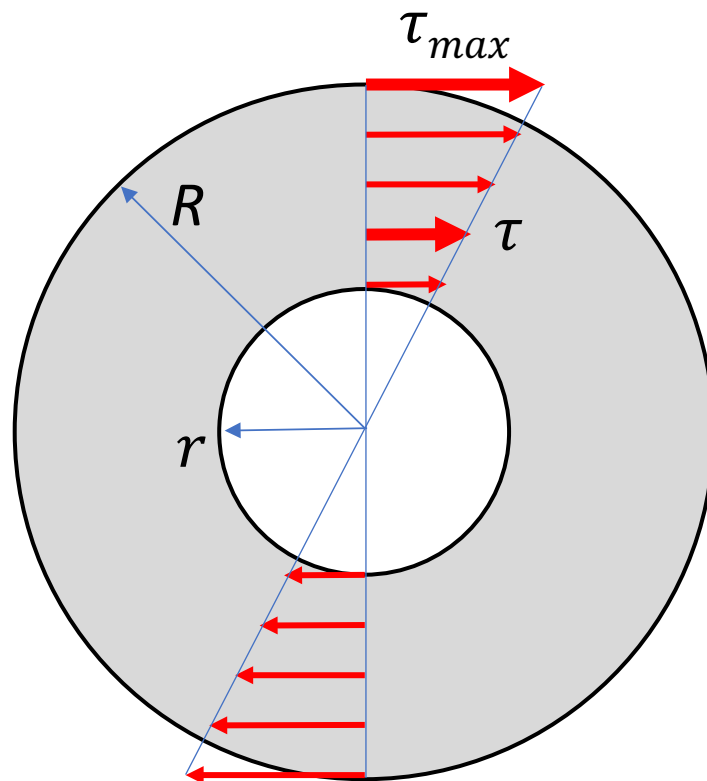
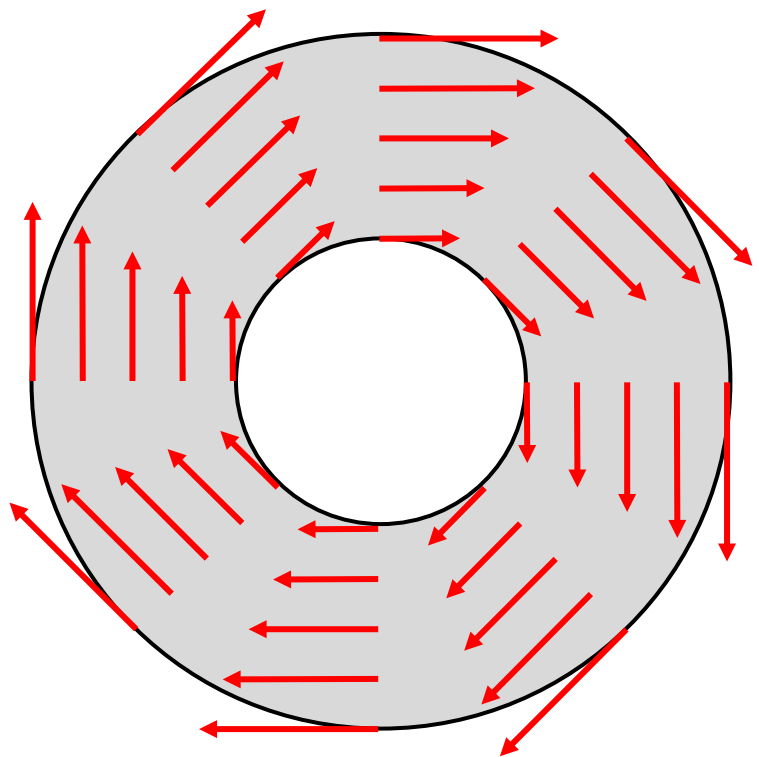
$$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{\left(\frac{J_0}{R}\right)} = \frac{M_s}{W_0}$$

$$\tau = \frac{M_s}{\left(\frac{J_0}{\rho}\right)}$$

$$W_0 = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_0}$$



$$\tau_{max} = \frac{M_s}{\left(\frac{J_0}{R}\right)} = \frac{M_s}{W_0}$$

$$\tau = \frac{M_s}{\left(\frac{J_0}{\rho}\right)}$$

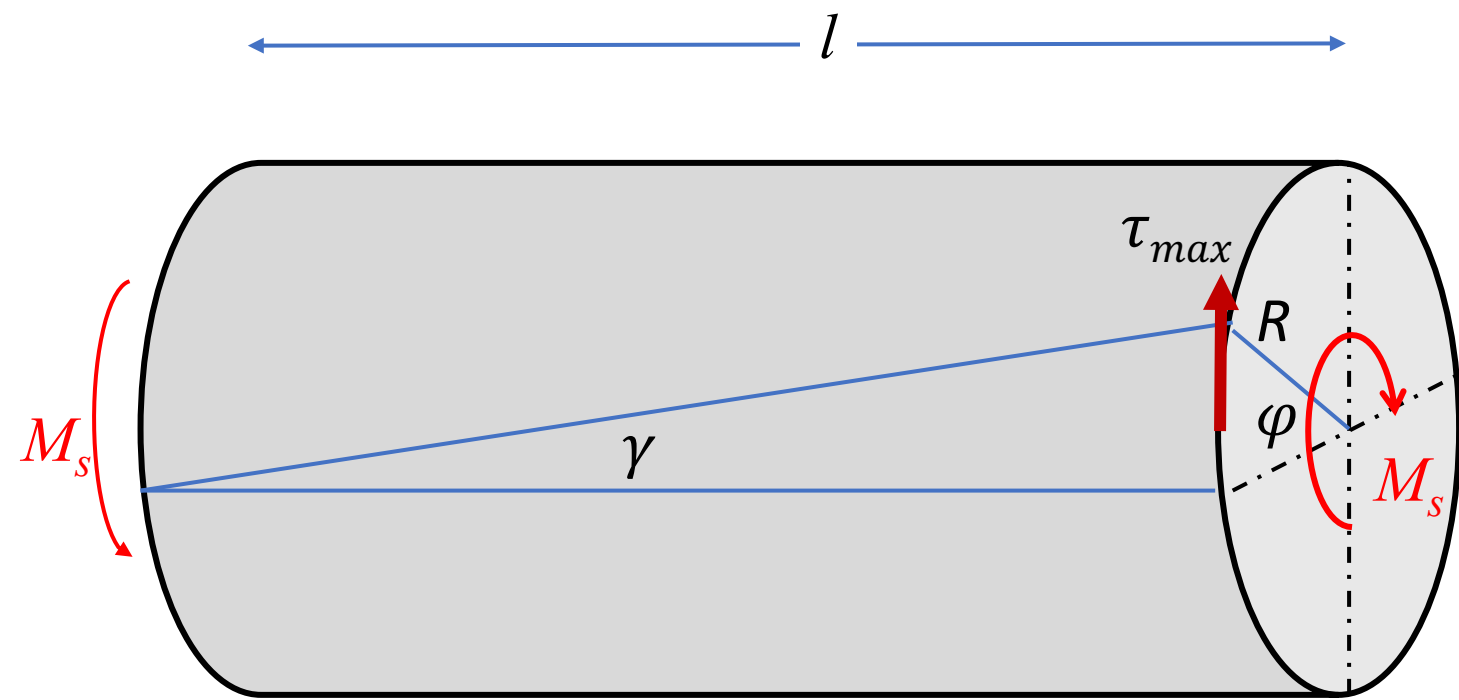
$$J_0 = \int_F \rho^2 dA$$

$$W_0 = \frac{J_0}{R}$$

$$J_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$W_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_0}$$

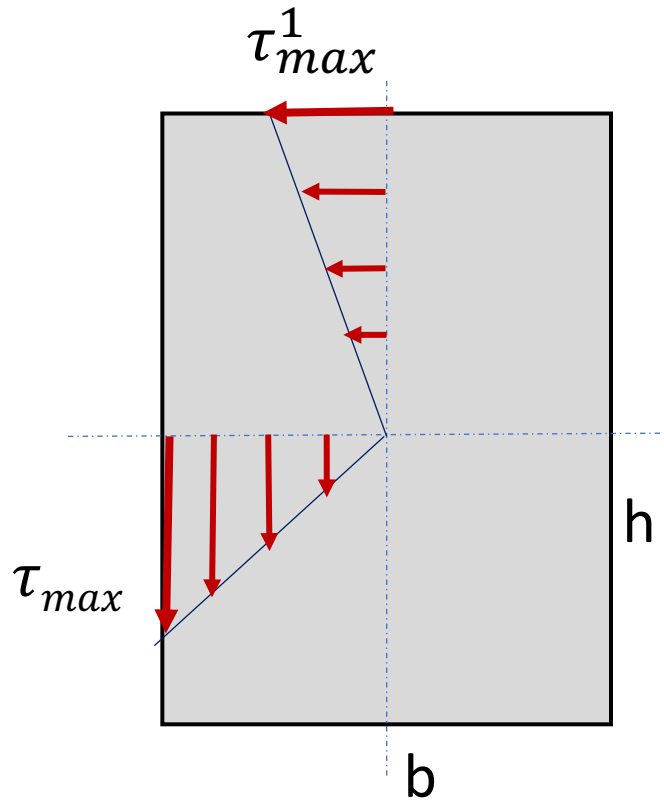


$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{\left(\frac{J_0}{R}\right)}$$

$$\frac{\varphi R}{l} = \gamma$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_0}$$

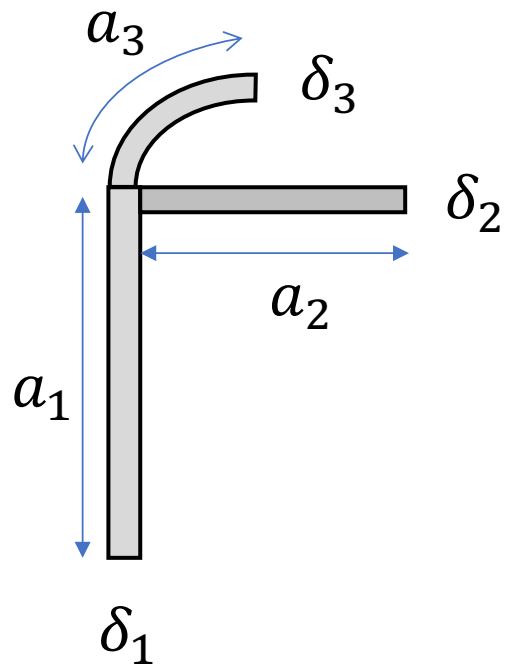


$$\tau_{max} = \frac{M_s}{\alpha h b^2}$$

$$\tau_{max}^1 = c \tau_{max}$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{G \beta h b^3}$$

h/b	1	1,5	2	3	6	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,298	0,333
c	1,000	0,858	0,796	0,753	0,743	0,743



$$M_s = \sum M_{si}$$

$$\varphi = \varphi_i$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{\frac{1}{3} G \sum a_i \delta_i^3}$$

$$\varphi = \frac{M_{si} l}{\frac{1}{3} G a_i \delta_i^3}$$

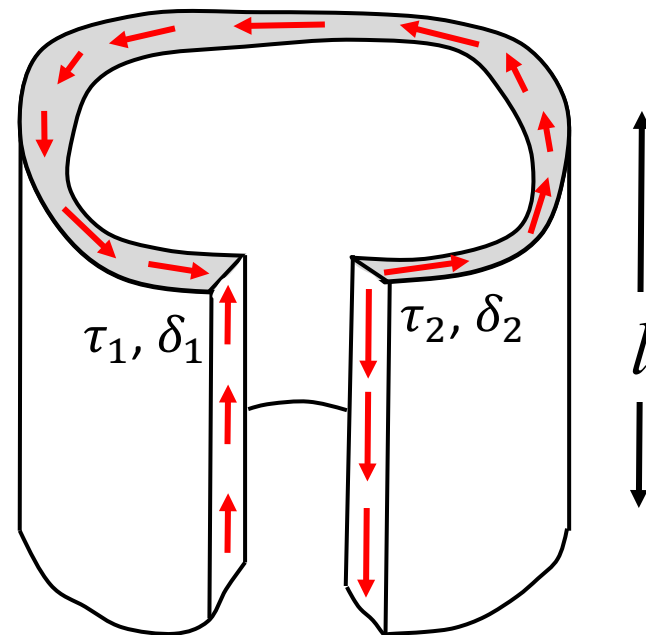
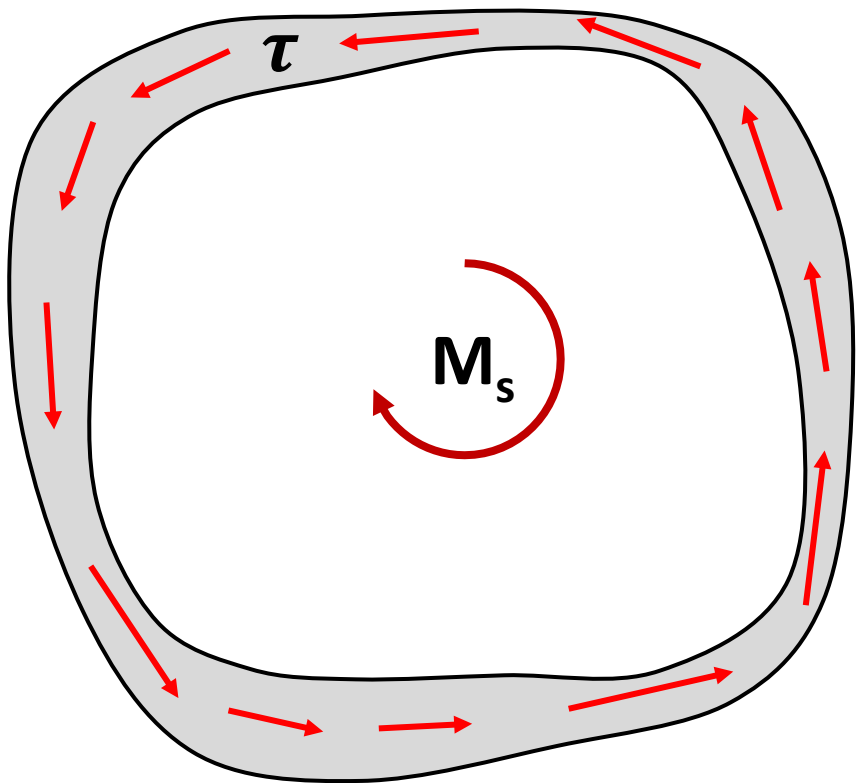
$$\tau_i = \frac{M_{si}}{\frac{1}{3} a_i \delta_i^2}$$



$$\tau_{max} = \frac{M_s}{\frac{\frac{1}{3} \sum a_i \delta_i^3}{\delta_{max}}}$$

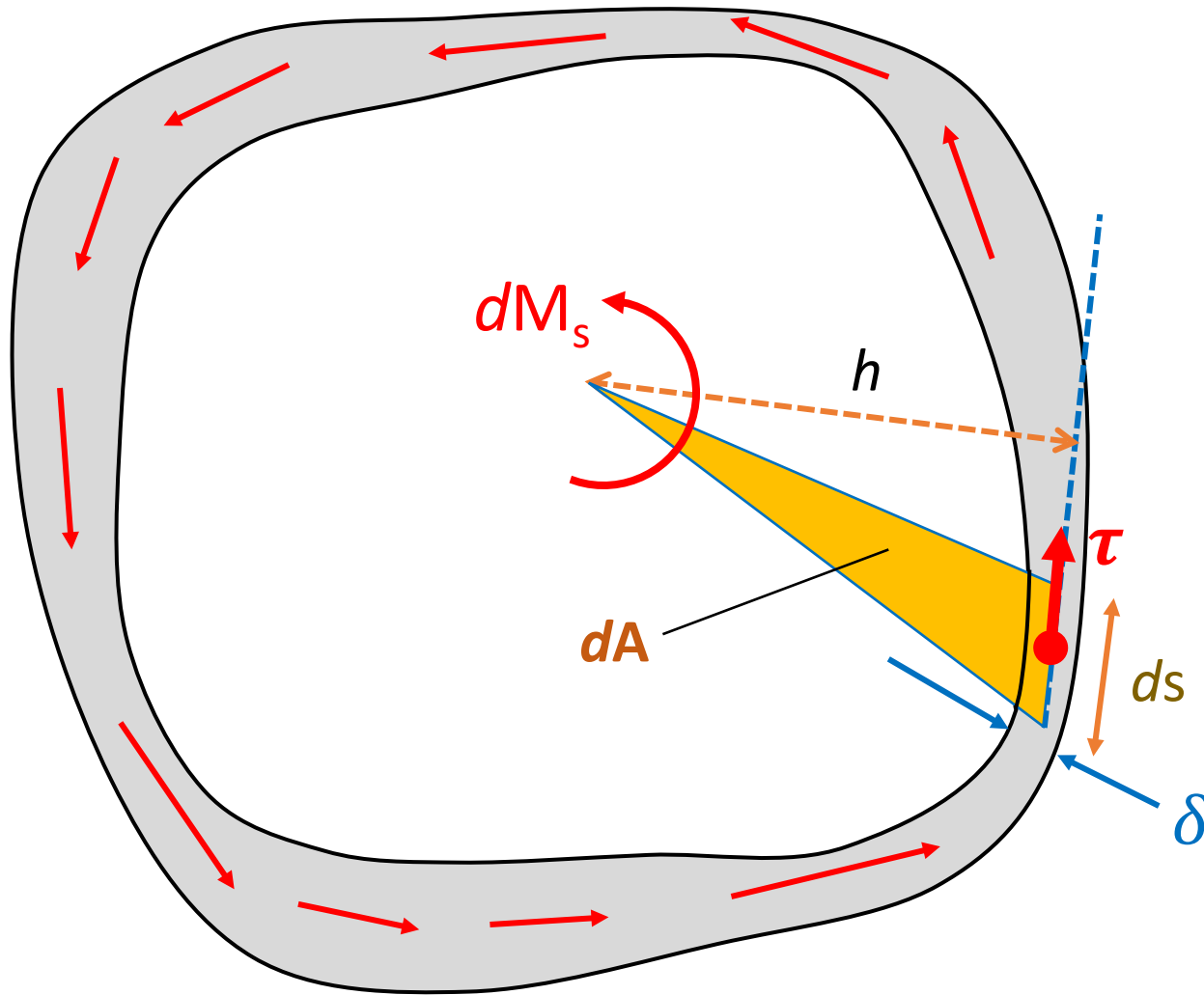


$$\tau_i = \frac{M_s}{\frac{\frac{1}{3} \sum a_i \delta_i^3}{\delta_i}}$$



$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$$

$$\tau \delta = \text{const}$$



$$dM_s = \tau \delta ds h$$

$$dA = \frac{1}{2} h ds$$

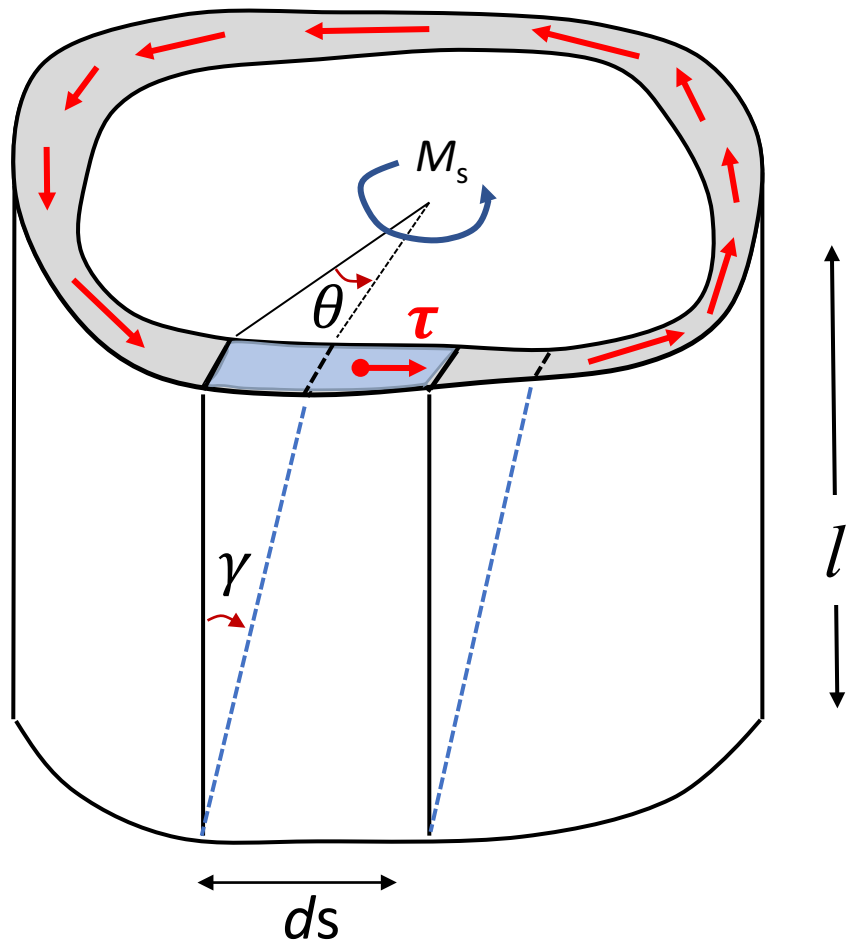
$$dM_s = 2 \tau \delta dA$$

$$M_s = \int_A 2 \tau \delta dA = 2 \tau \delta \int_A dA$$

$$M_s = 2 \tau \delta A_{sr}$$

$$\tau = \frac{M_s}{2 \delta A_{sr}}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{2 \delta_{min} A_{sr}}$$



$$L = \frac{1}{2} M_s \varphi$$

$$dL = \frac{1}{2} \tau \delta ds \gamma l$$

$$M_s \varphi = l \int_S \tau \delta \gamma ds$$

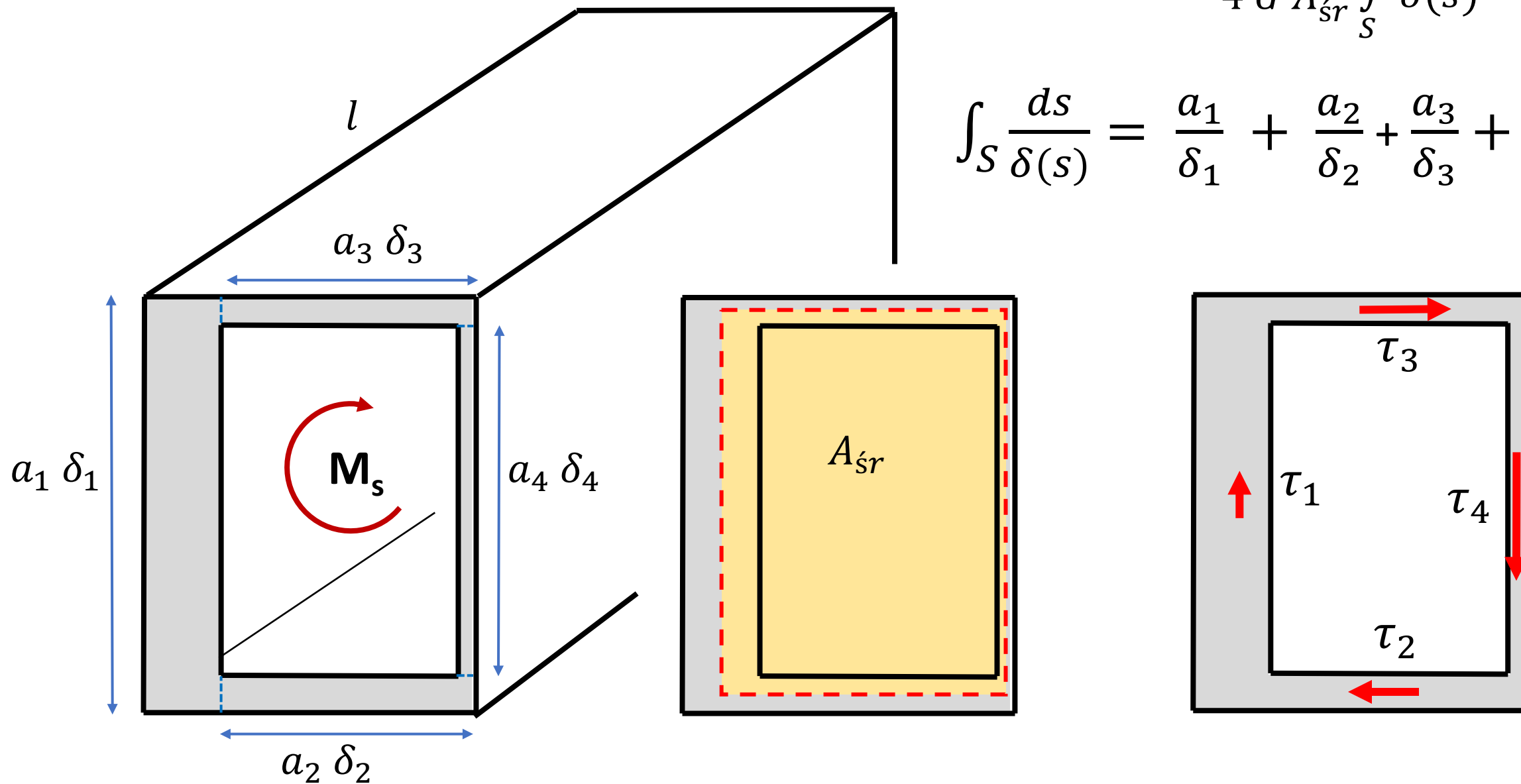
$$\varphi = \frac{M_s l}{4 G A_{sr}^2} \int_S \frac{ds}{\delta(s)}$$

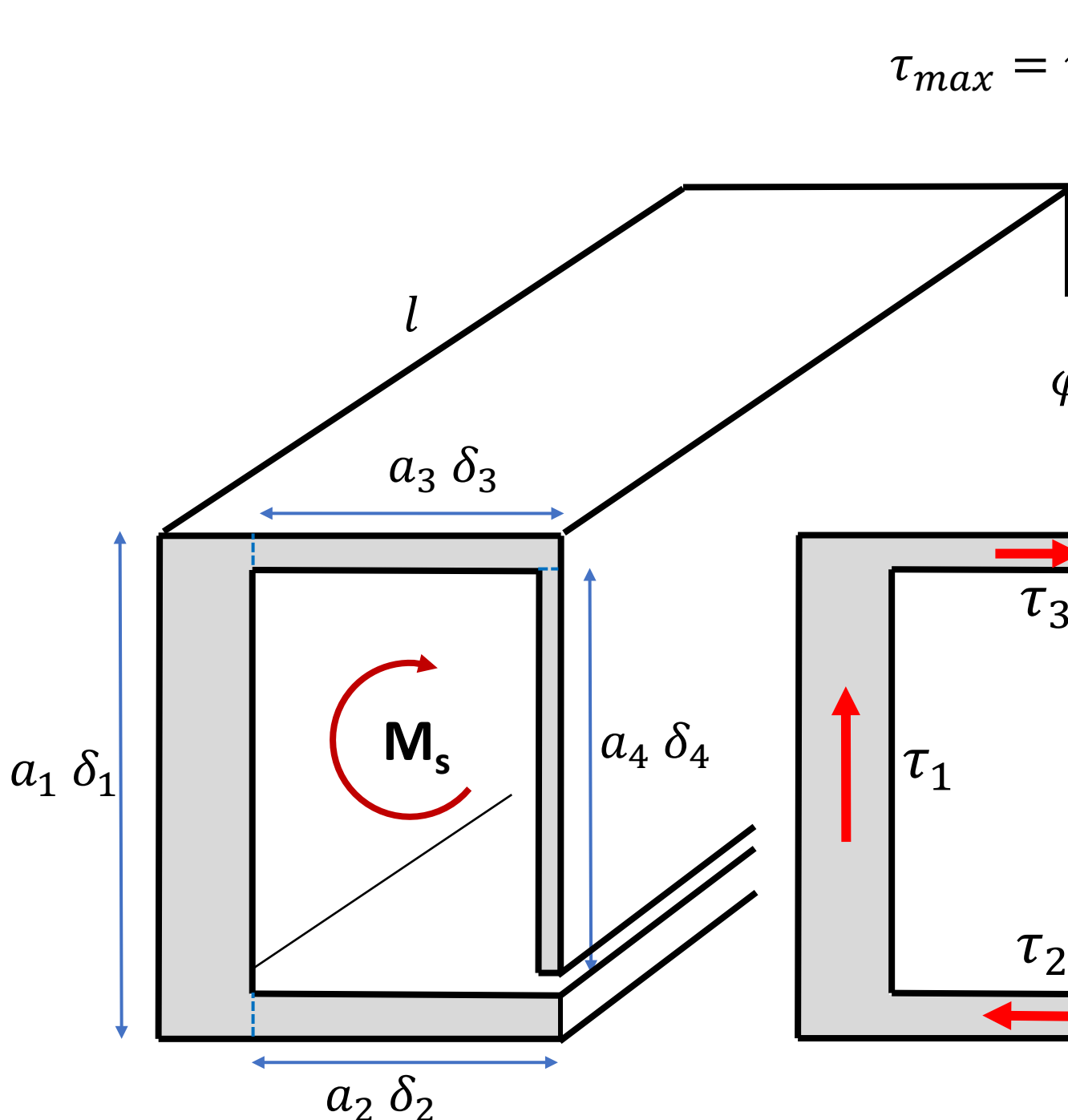
$$M_s = 2 \tau \delta A_{sr} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_s}{2 \delta A_{sr}} \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\tau_{max} = \tau_4 = \frac{M_s}{2\delta_4 A_{sr}}$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{4 G A_{sr}^2} \int_S \frac{ds}{\delta(s)}$$

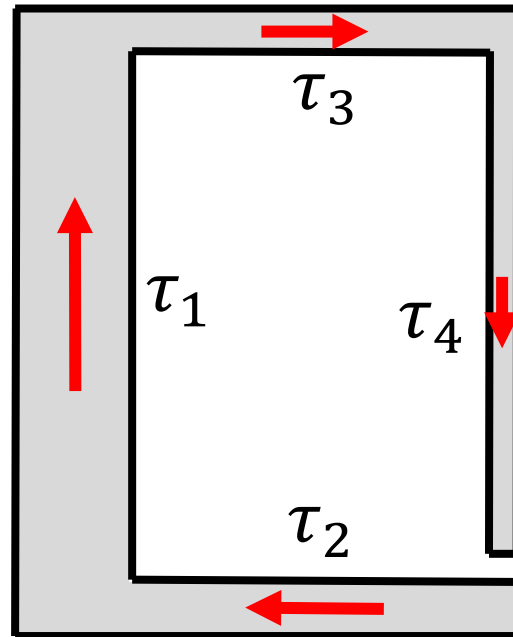
$$\int_S \frac{ds}{\delta(s)} = \frac{a_1}{\delta_1} + \frac{a_2}{\delta_2} + \frac{a_3}{\delta_3} + \frac{a_4}{\delta_4}$$

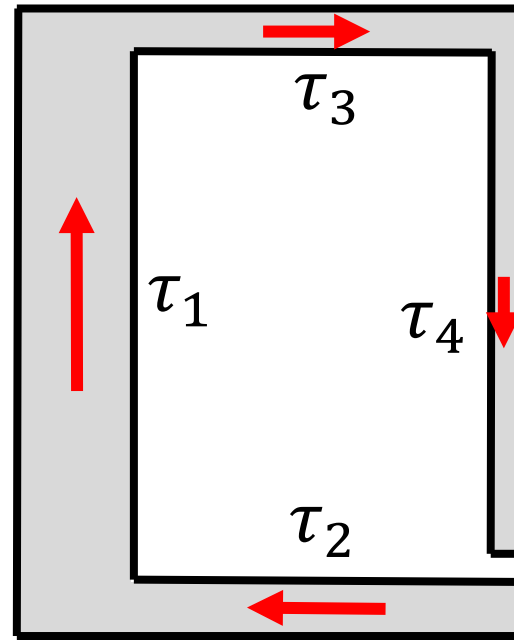
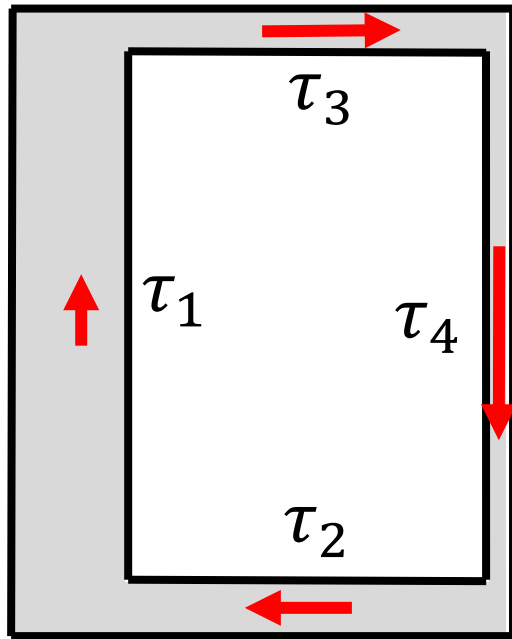


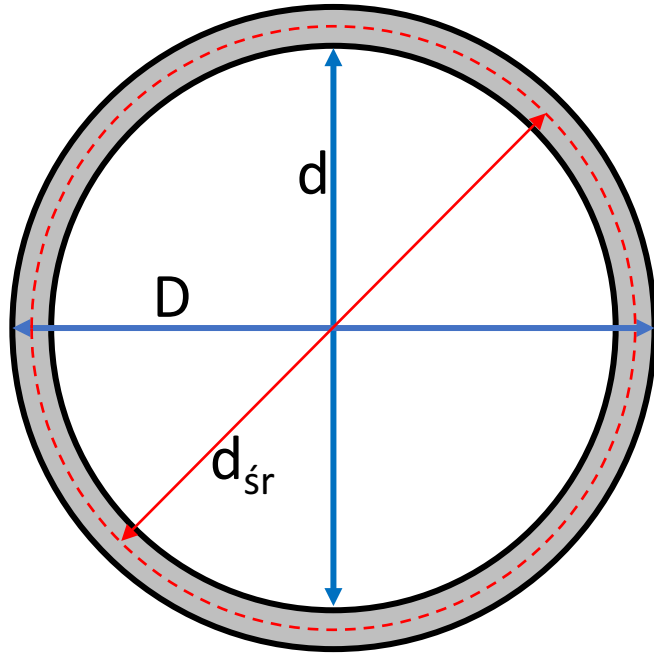


$$\tau_{max} = \tau_1 = \frac{M_s \delta_1}{\frac{1}{3} (a_1 \delta_1^3 + a_2 \delta_2^3 + a_3 \delta_3^3 + a_4 \delta_4^3)}$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{\frac{1}{3} (a_1 \delta_1^3 + a_2 \delta_2^3 + a_3 \delta_3^3 + a_4 \delta_4^3) G}$$







$$\tau_{max} = \frac{M_s}{2 \delta A_{sr}} = 11,84 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_s 16 D}{\pi(D^4 - d^4)} = 12,22 \text{ MPa}$$

$$\delta = \frac{D - d}{2}$$

$$d_{sr} = \frac{D + d}{2}$$

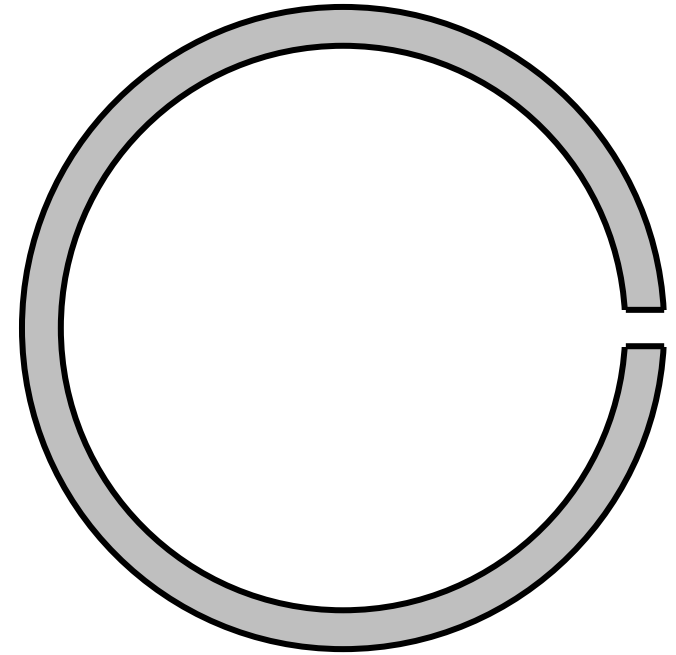
$$A_{sr} = \frac{\pi d_{sr}^2}{4}$$

$$a = \pi d_{sr}$$

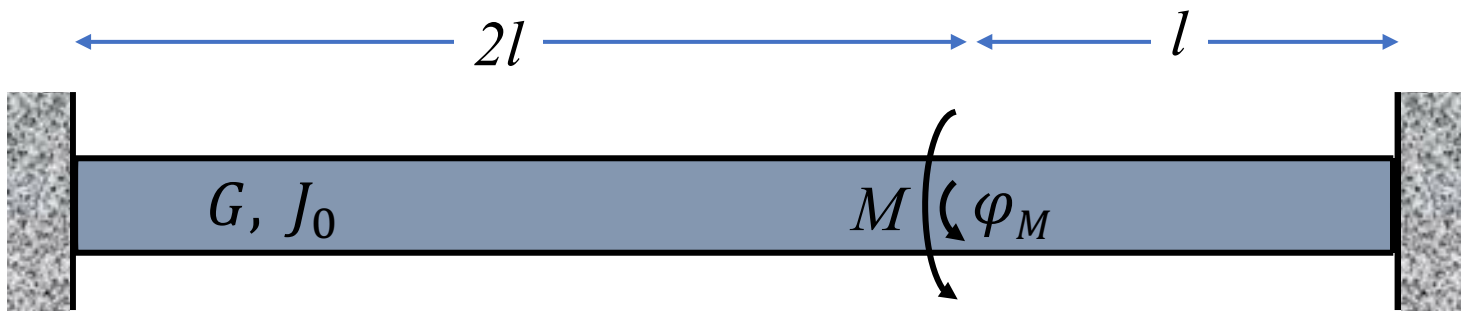
$$D = 0,12 \text{ m}$$

$$d = 0,112 \text{ m}$$

$$M_s = 1000 \text{ Nm}$$



$$\tau_{max} = \frac{M_s \delta}{\frac{1}{3} a \delta^3} = 515 \text{ MPa}$$

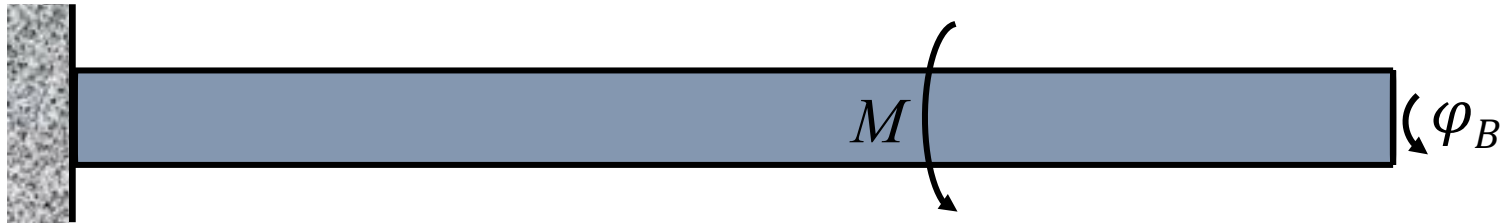


$$\tau_{max} = \frac{M_s}{\left(\frac{J_0}{R}\right)}$$

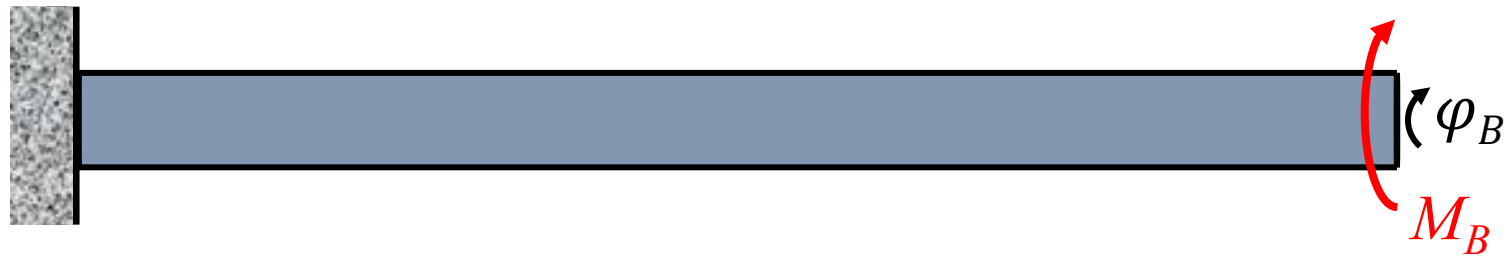
M_s

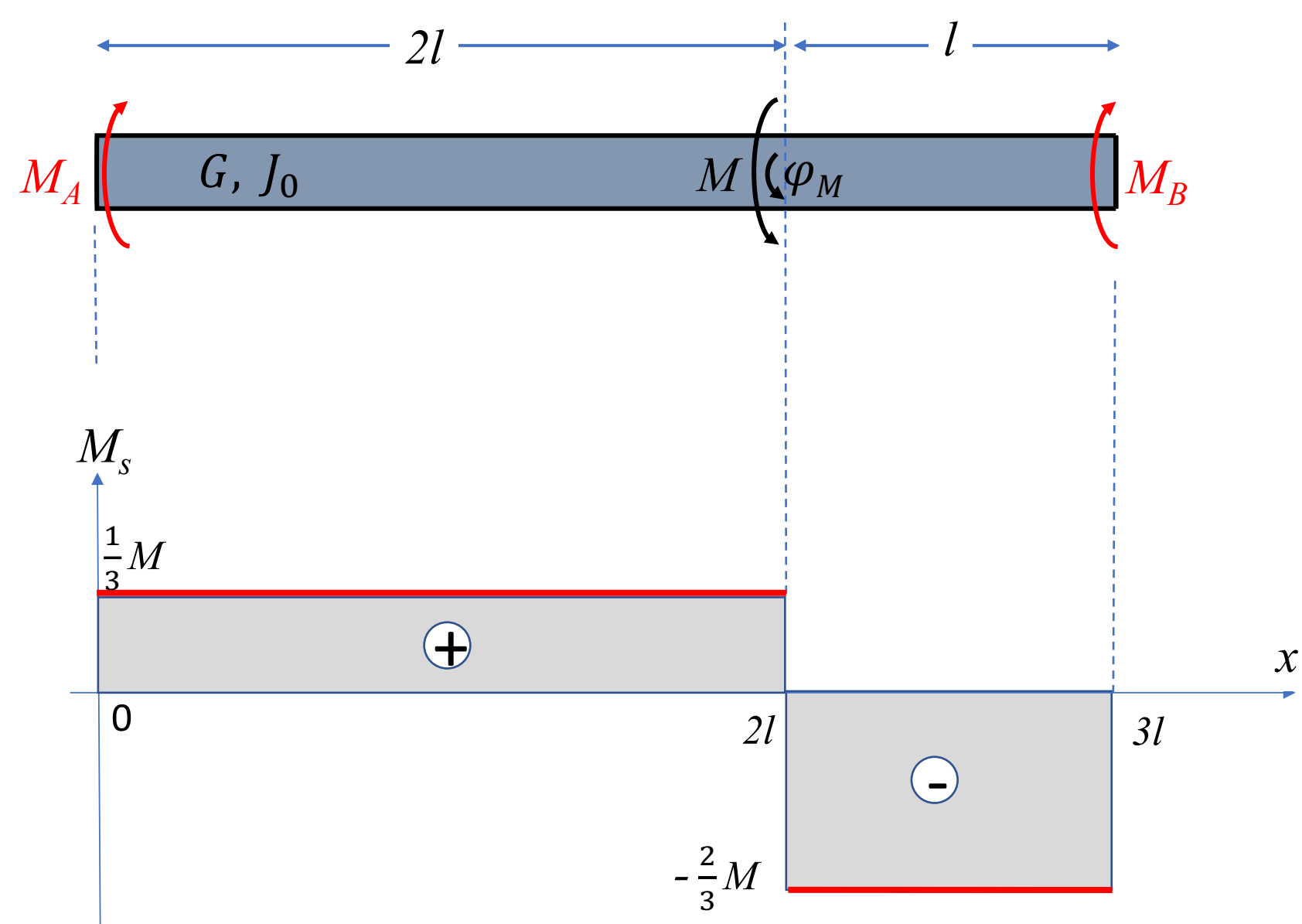


$$M = M_A + M_B$$



$$\varphi_B = \frac{M 2l}{G J_0} = \frac{M_B 3l}{G J_0}$$



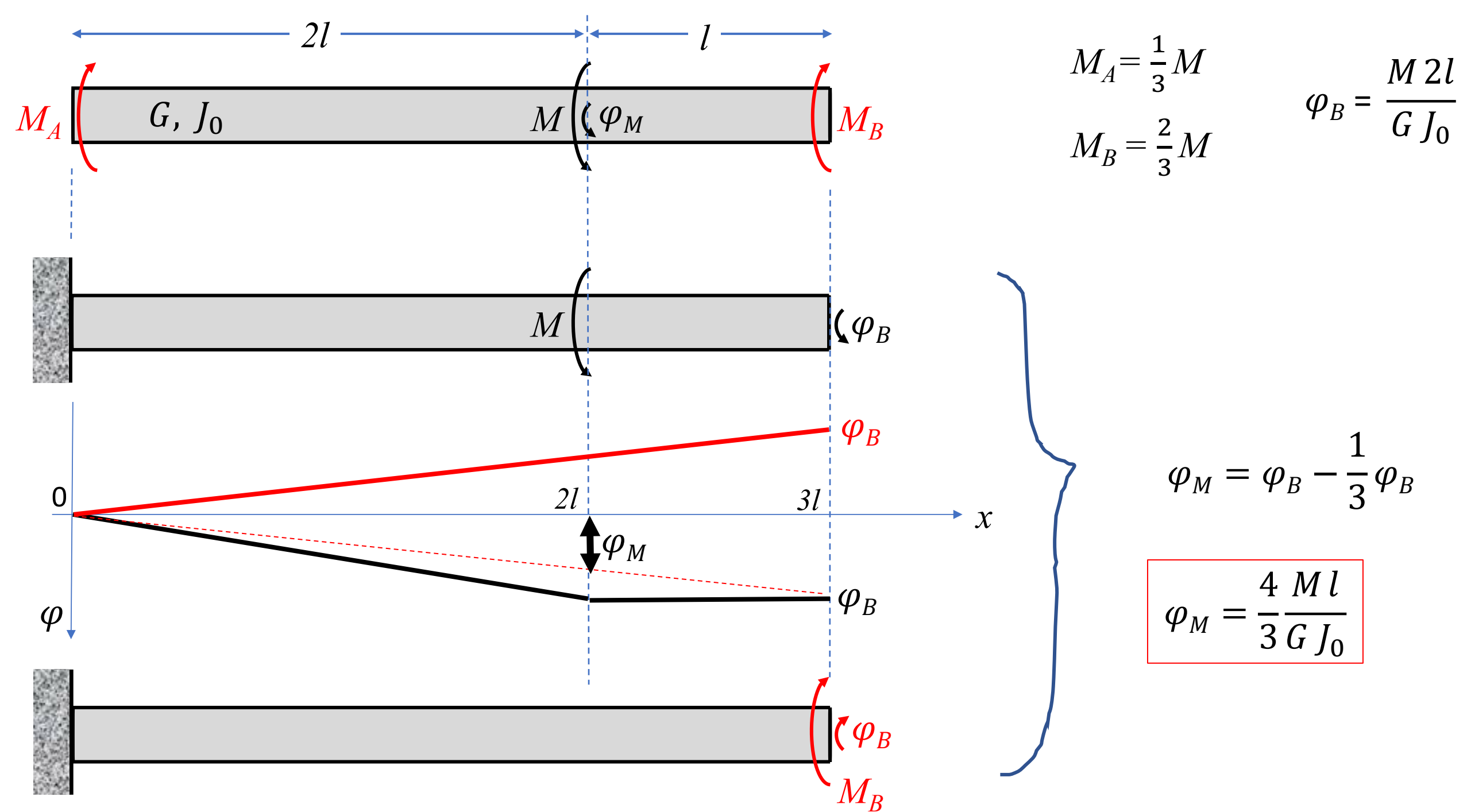


$$M = M_A + M_B$$

$$\frac{M \cdot 2l}{G J_0} = \frac{M_B \cdot 3l}{G J_0}$$

$$M_A = \frac{1}{3} M$$

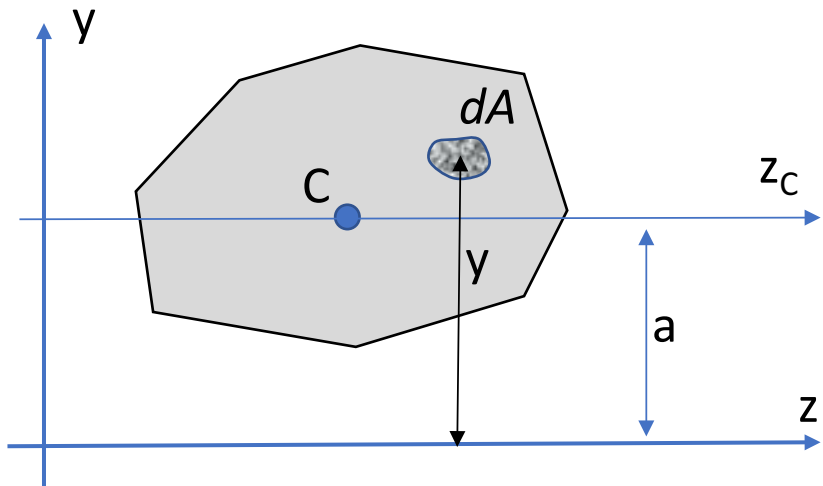
$$M_B = \frac{2}{3} M$$



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKKICH

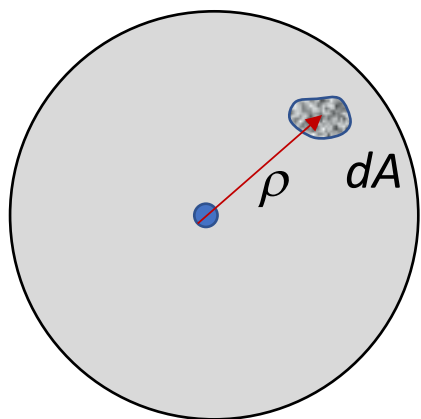




Moment statyczny $S_z = \int_A y dA = a A$

Biegunowy moment
bezwładności

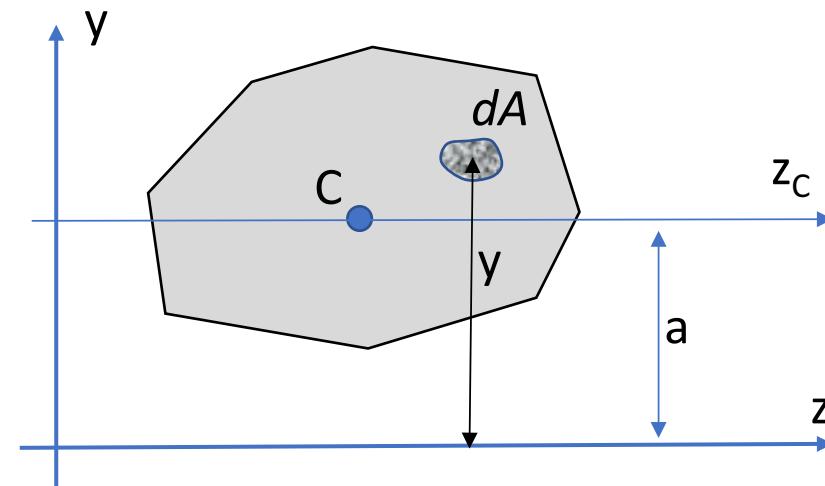
$$J_0 = \int_A \rho^2 dA$$



Moment bezwładności

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

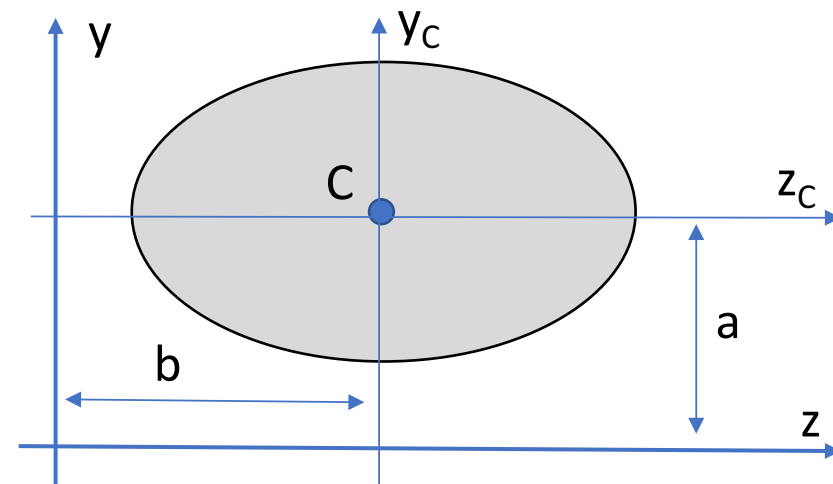
$$J_z = J_{z_c} + A a^2$$

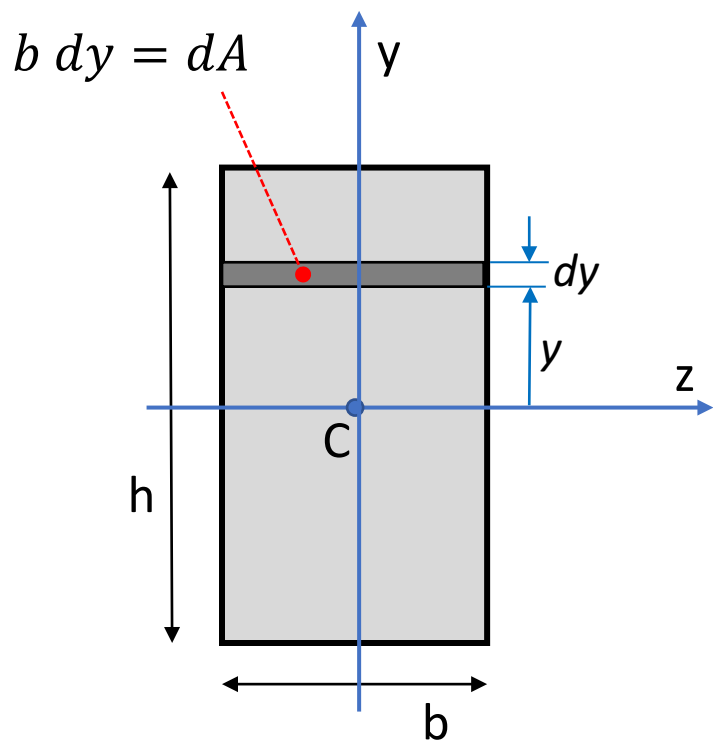


$$J_{yz} = \int_F yz dA$$

$$J_{yz} = J_{y_c z_c} + A ab$$

Moment odśrodkowy

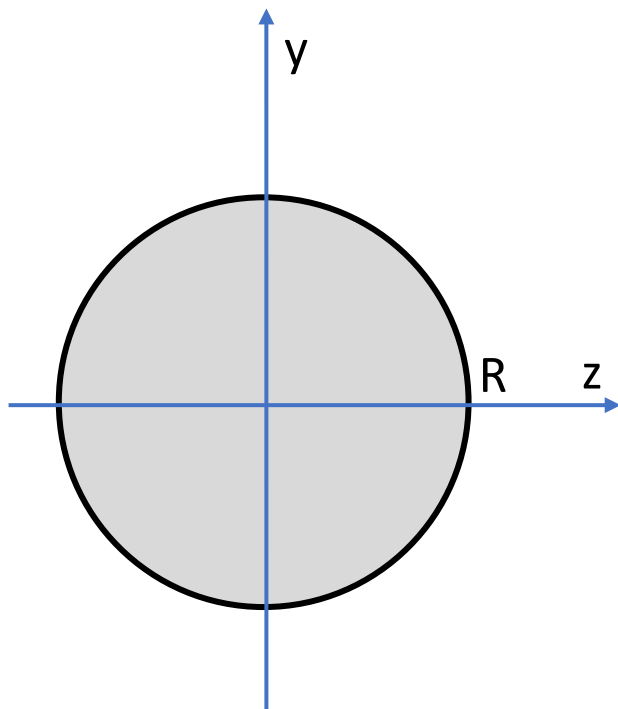




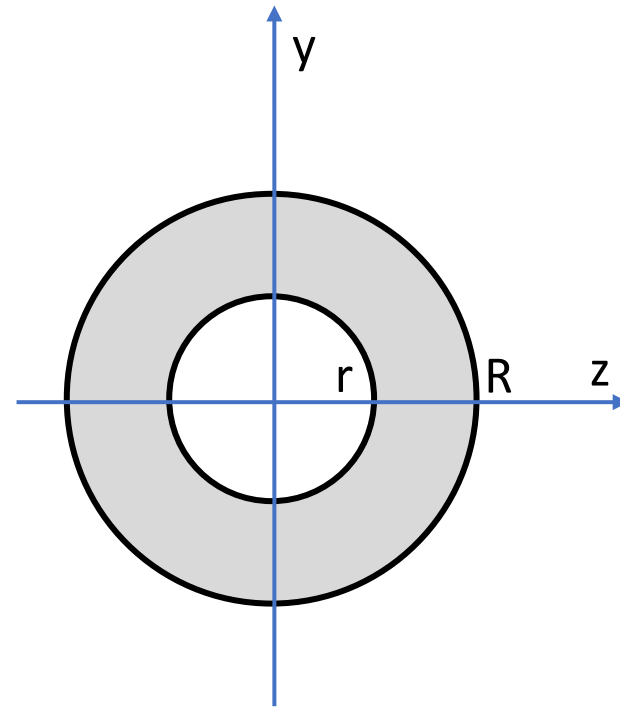
$$J_z = \int_A y^2 \, dA$$

$$J_z = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} b y^2 \, dy$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12}$$



$$J_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$



$$J_z = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

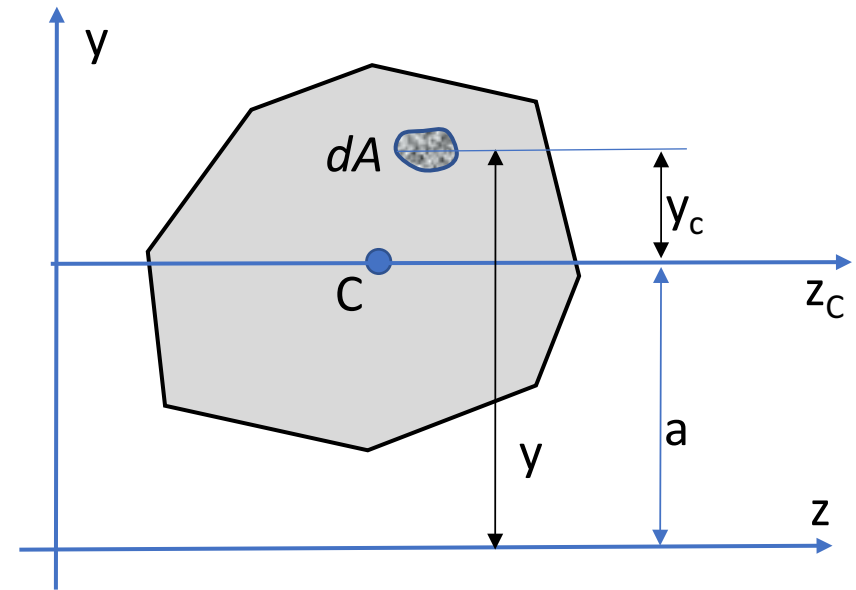
$$J_y = J_z$$

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

$$y = y_c + a$$

$$J_z = \int_A (y_c + a)^2 dA$$

$$J_z = \underbrace{\int_A y_c^2 dA}_{J_{z_c}} + 2a \underbrace{\int_A y_c dA}_{S_{z_c} = 0} + \underbrace{\int_A a^2 dA}_{A a^2}$$



$$J_z = J_{z_c} + A a^2$$

Twierdzenie Steinera

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

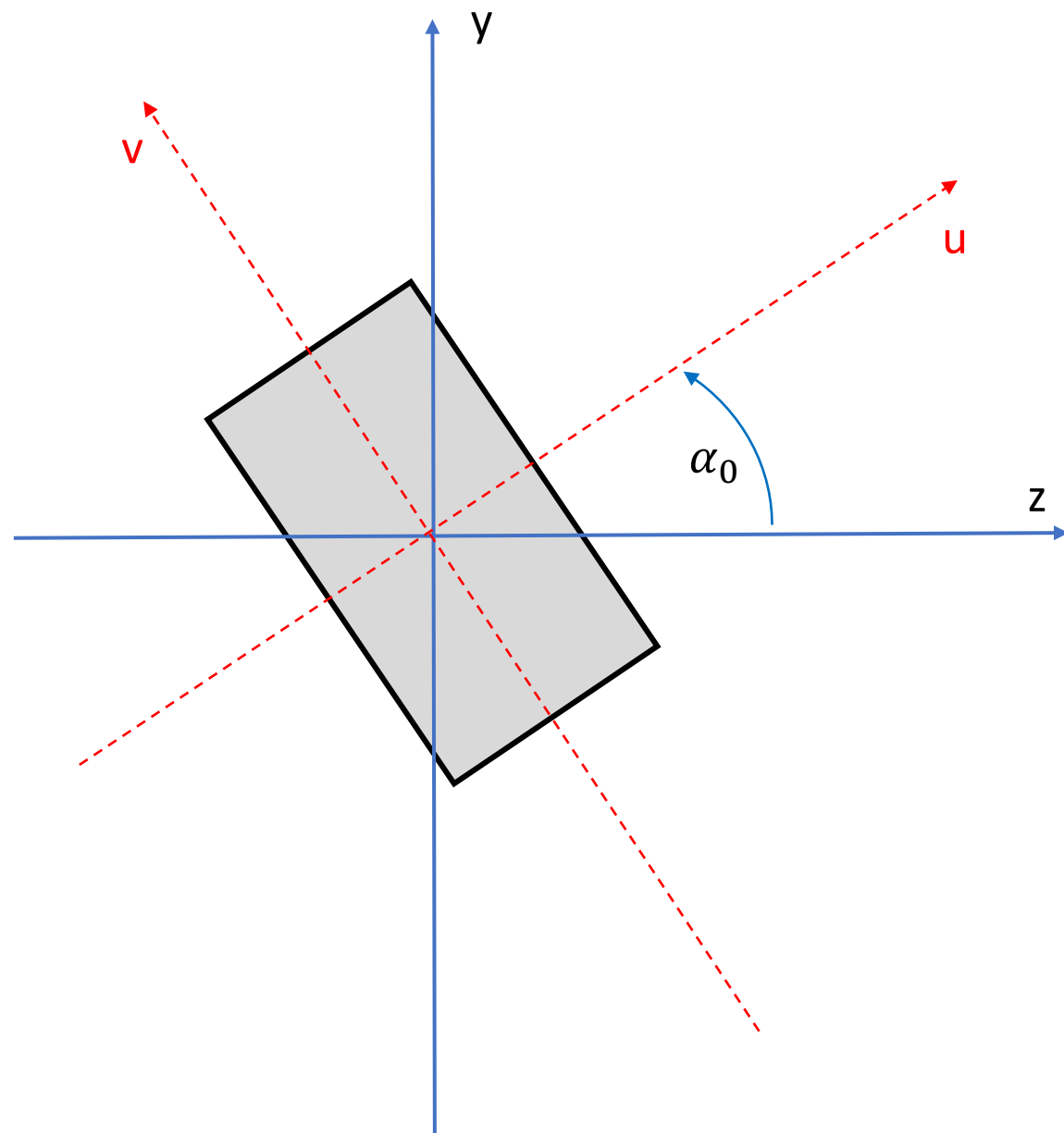
$$J_y = \int_A z^2 dA$$

$$J_{yz} = \int_F yz dA$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}$$

$$\left. \begin{array}{l} J_u = J_{max} \\ J_v = J_{min} \end{array} \right\} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

$$J_{uv} = 0$$



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

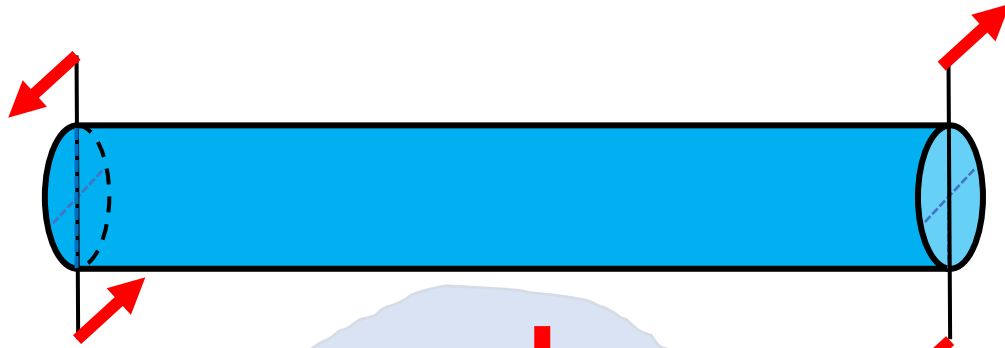
ZGINANIE



**PROSTE
PRZYPADKI
OBCIĄŻENIA**

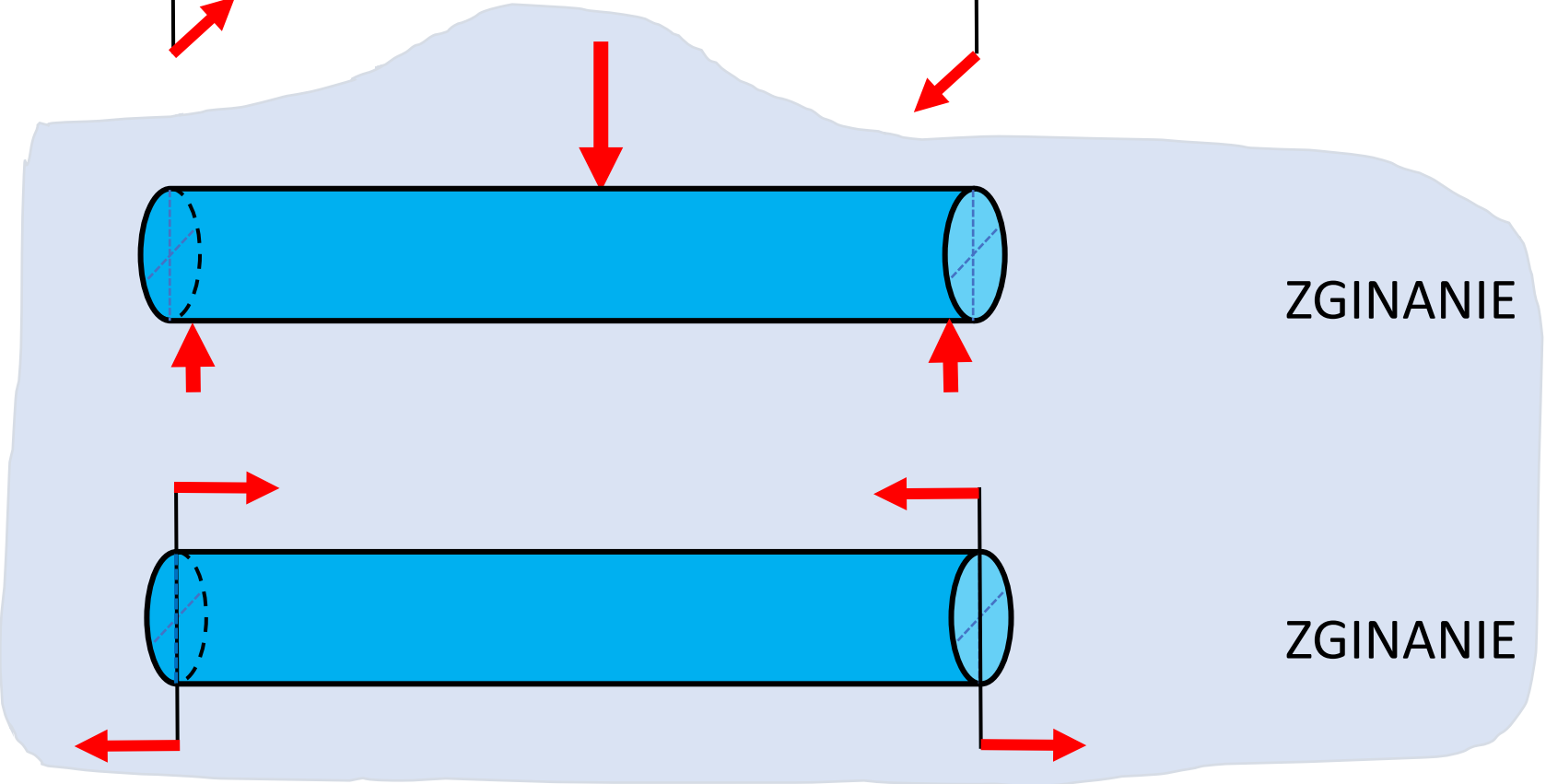
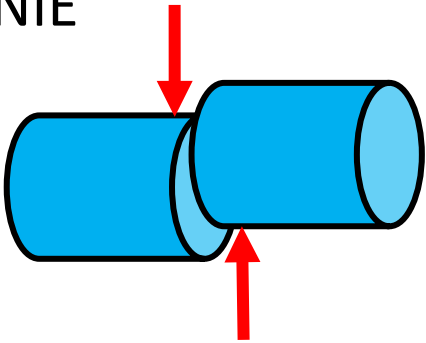


ROZCIĄGANIE
(ŚCISKANIE)



SKRĘCANIE

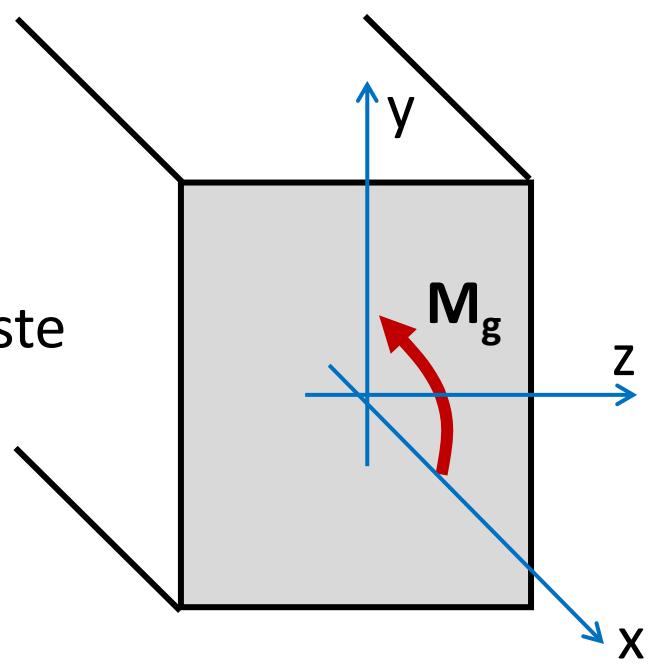
ŚCINANIE



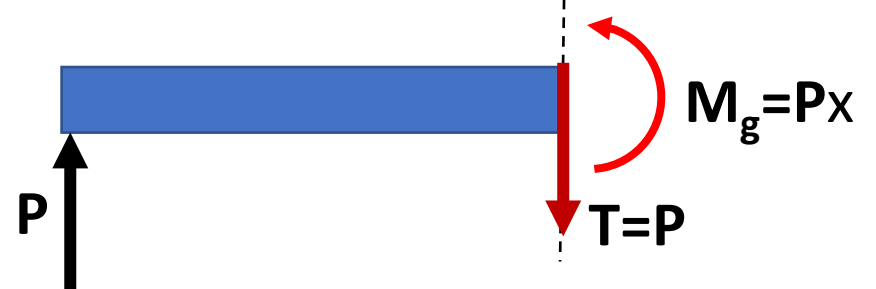
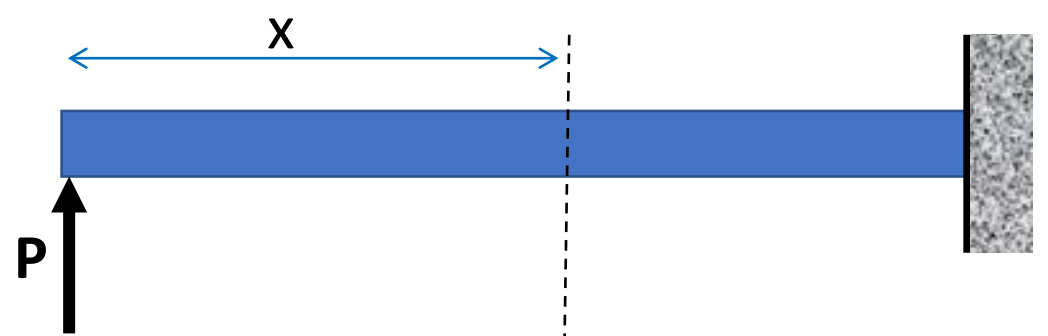
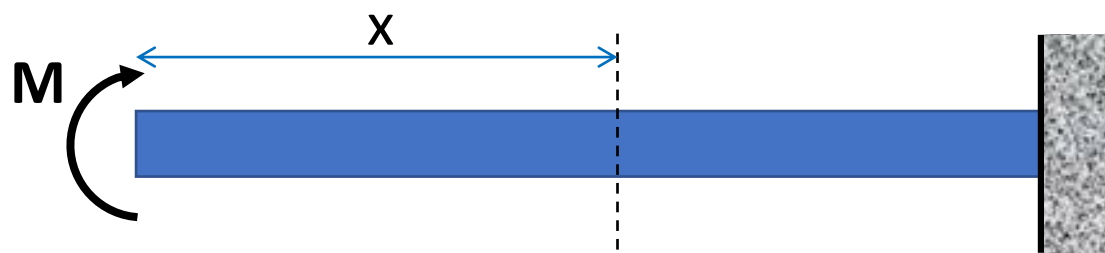
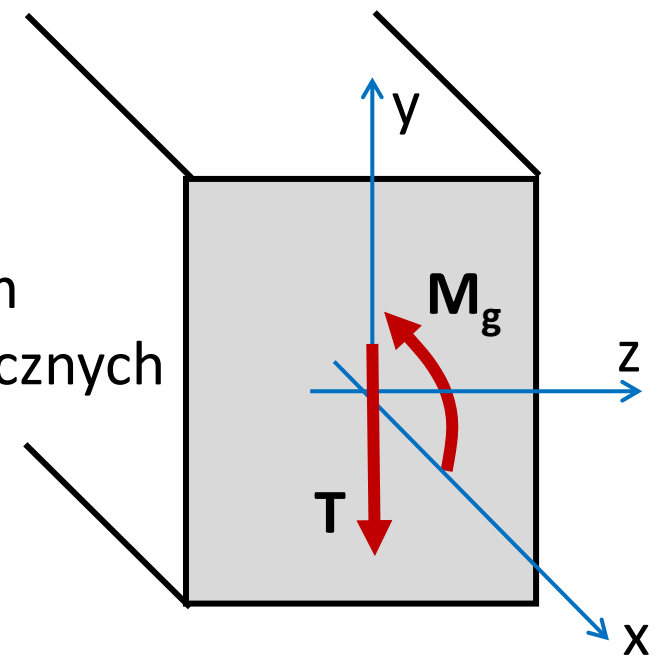
ZGINANIE

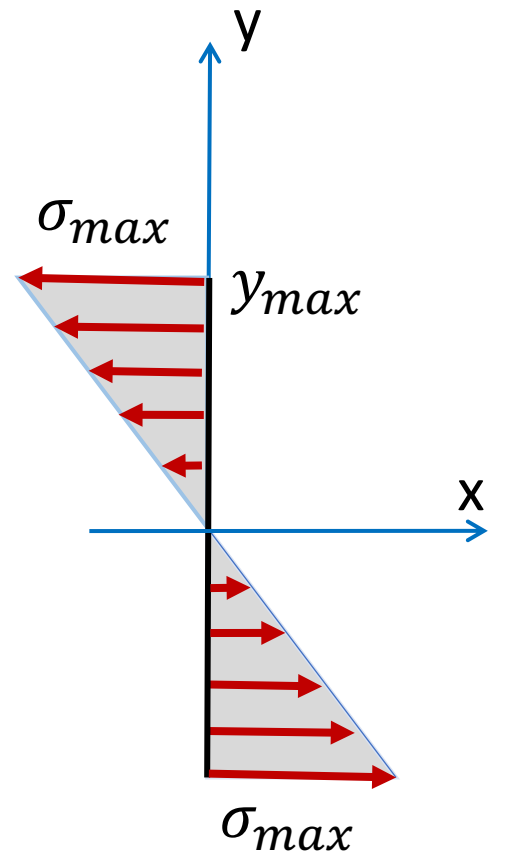
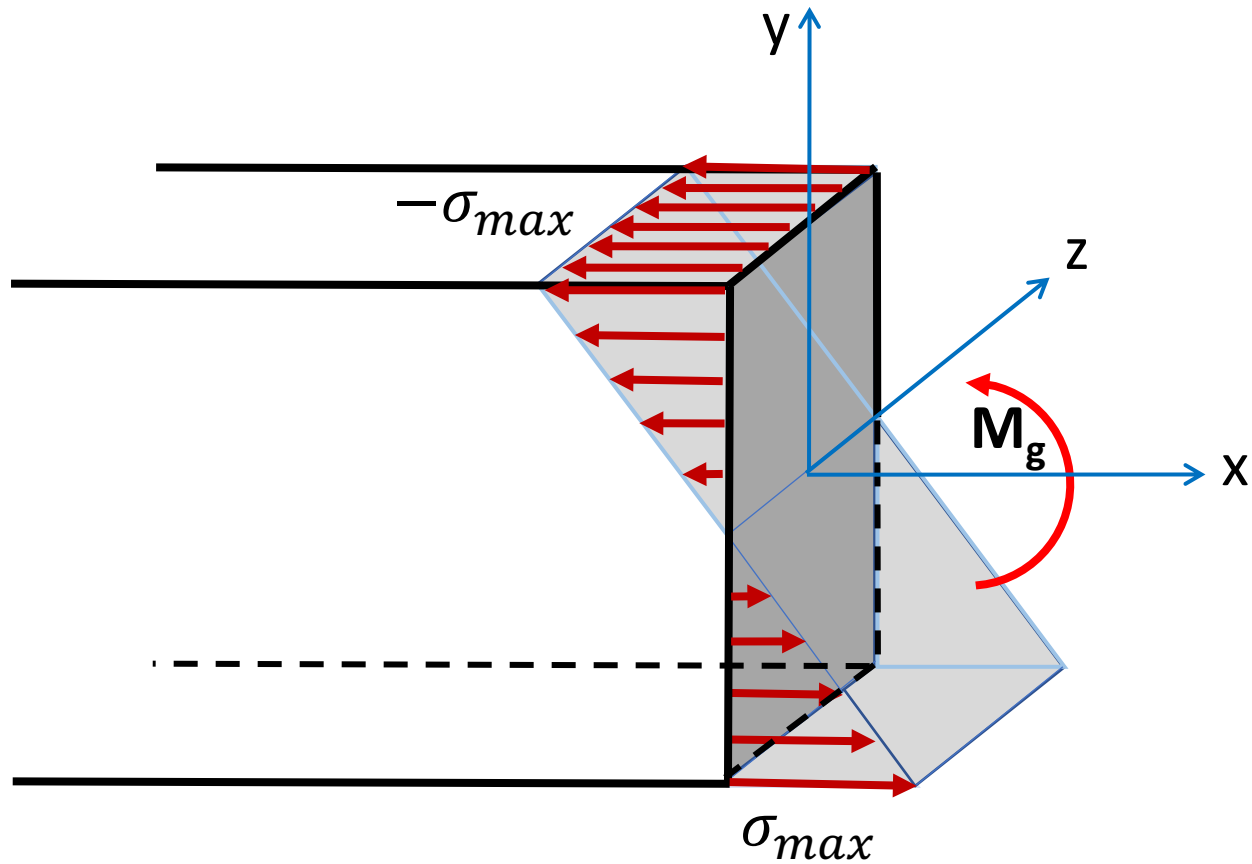
ZGINANIE

Zginanie czyste



Zginanie z udziałem sił poprzecznych





$$\int_A dA \sigma(y) y = M_g$$

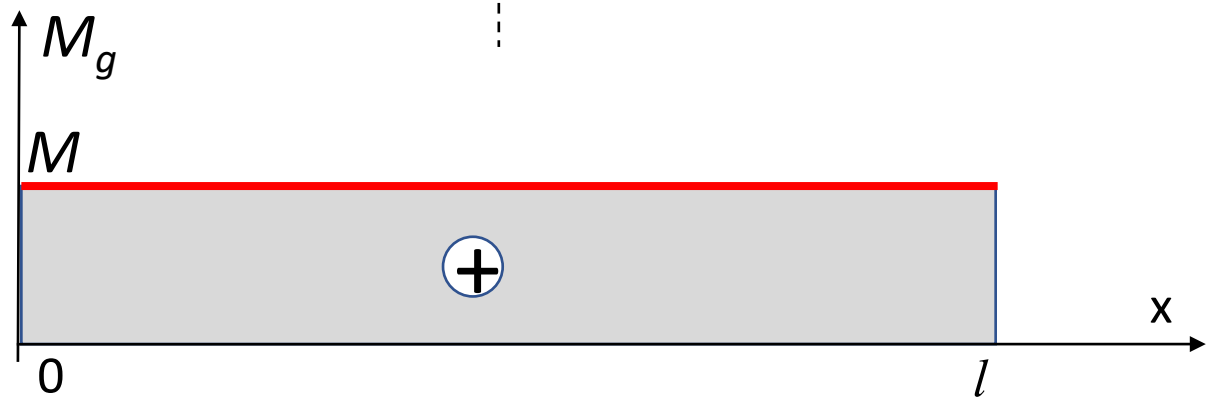
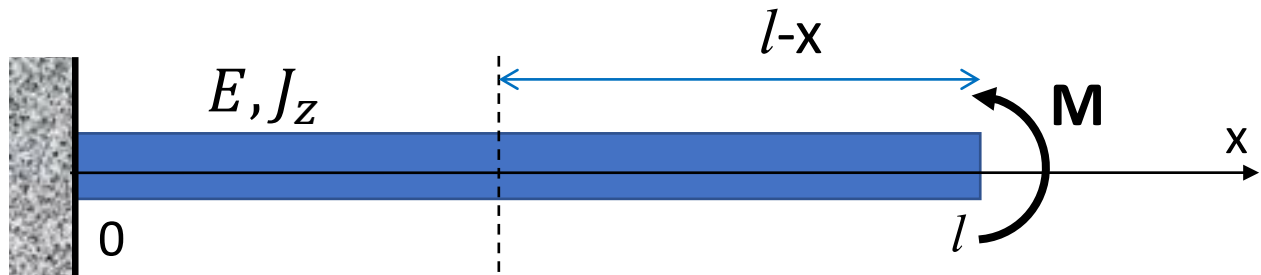
$$\frac{\sigma_{max}}{y_{max}} = \frac{\sigma(y)}{y}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_g}{\left(\frac{J_z}{y_{max}}\right)} = \frac{M_g}{W}$$

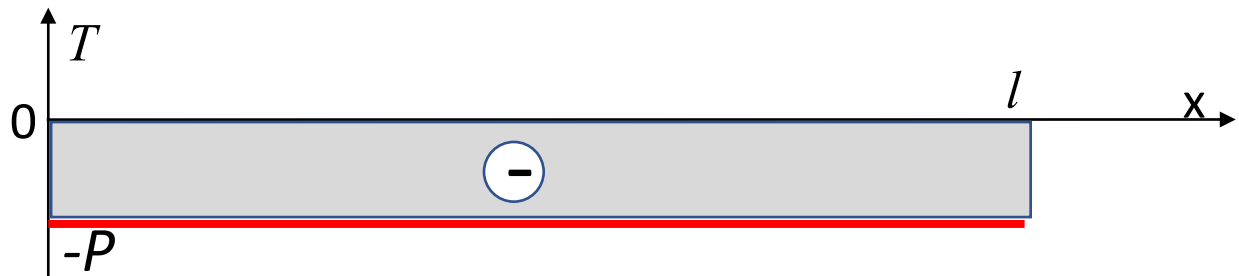
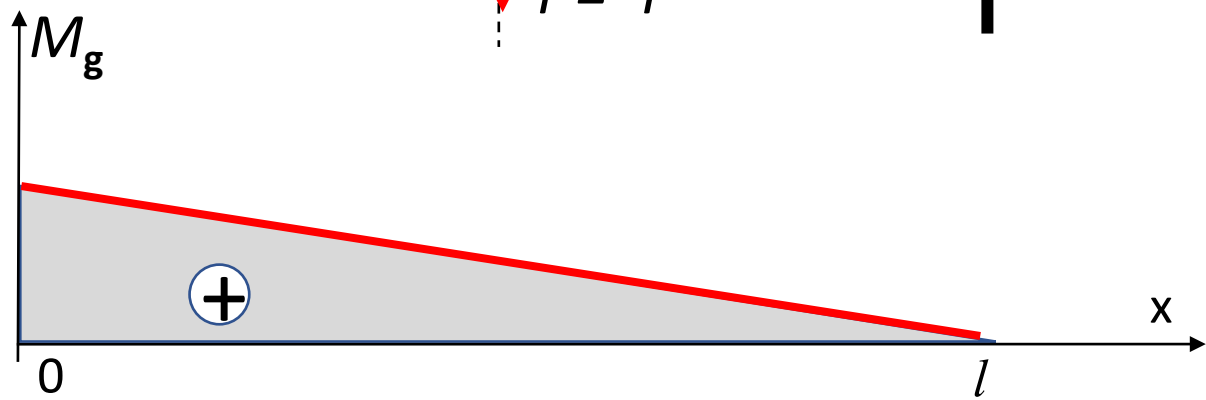
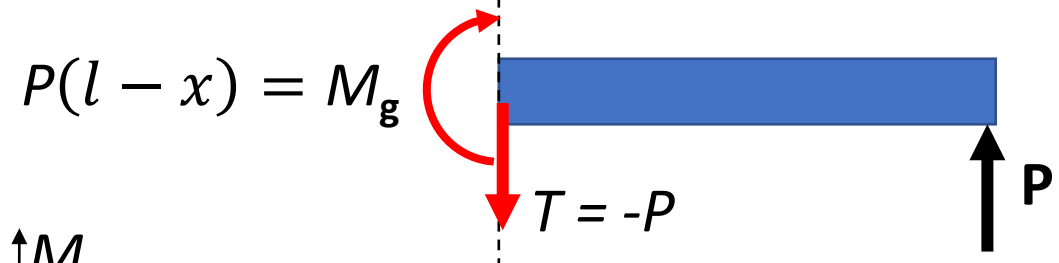
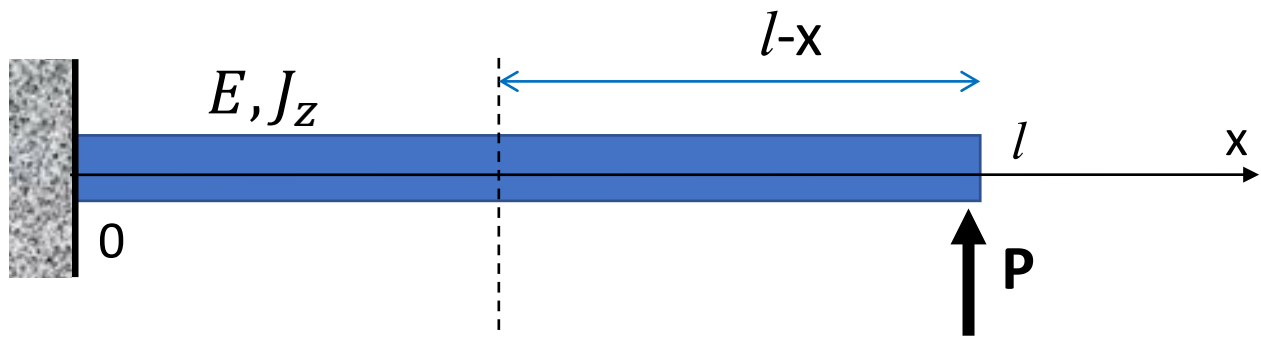
$$\sigma(y) = \frac{M_g}{\left(\frac{J_z}{y}\right)}$$

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

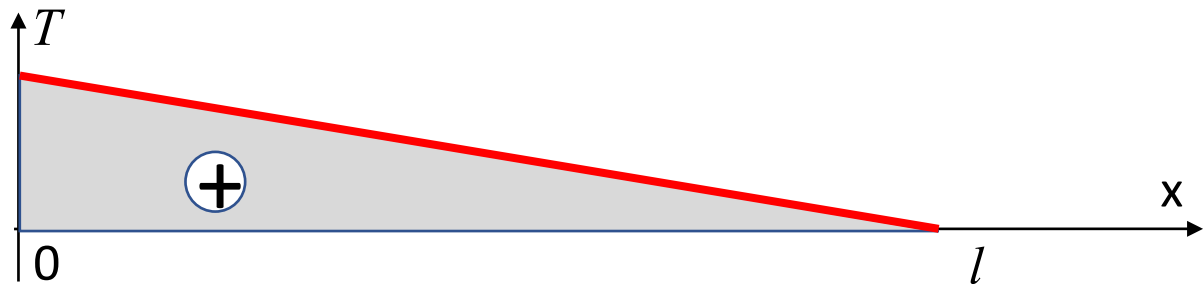
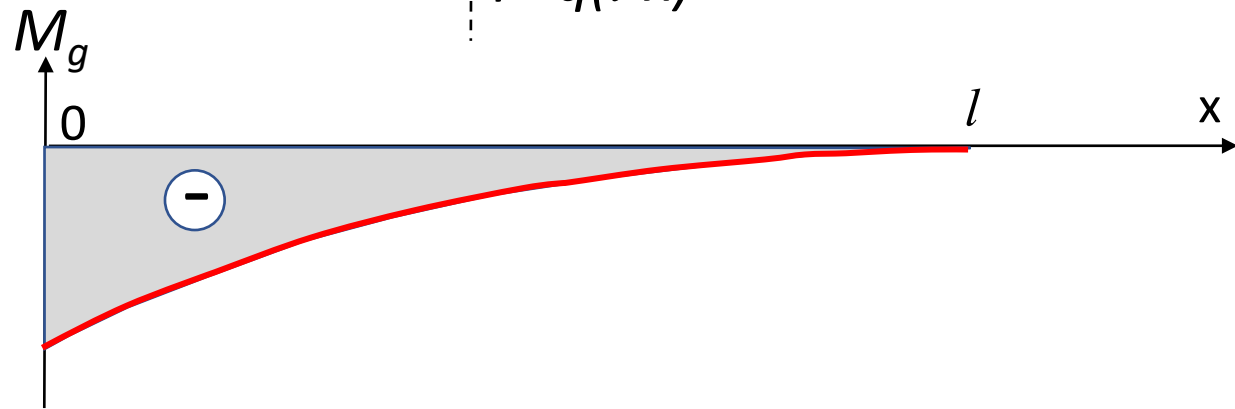
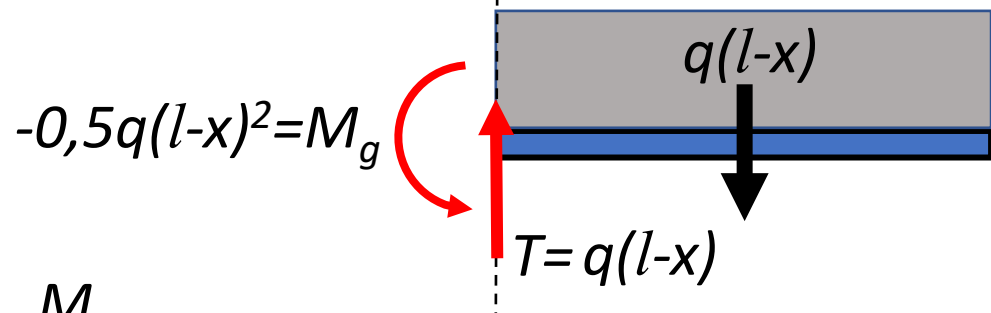
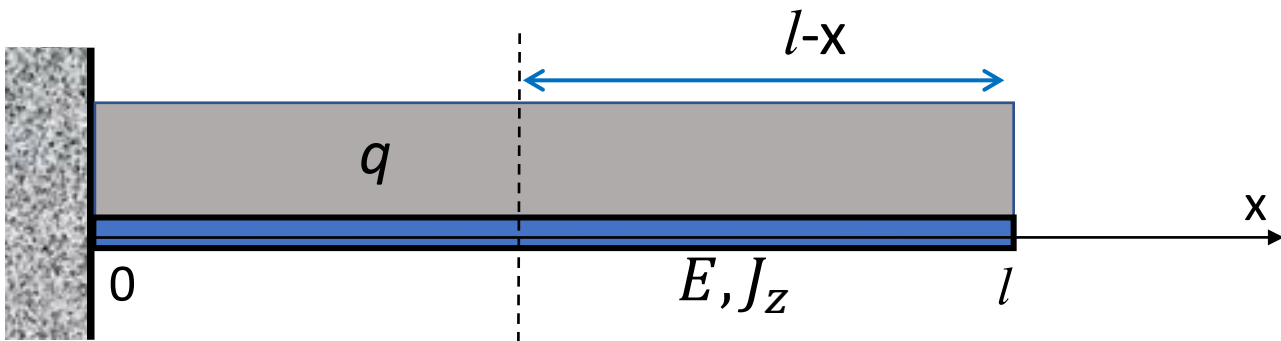
$$W = \frac{J_z}{y_{max}}$$



$$\sigma_{max} = \frac{M_g}{\left(\frac{J_z}{y_{max}}\right)} = \frac{M_g}{W}$$



$$\sigma_{max} = \frac{M_g}{\left(\frac{J_z}{y_{max}}\right)} = \frac{M_g}{W}$$



$$T = \frac{dM_g}{dx}$$

$$T = - \int_0^x q dx$$

$$q = - \frac{dT}{dx}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_g}{\left(\frac{J_z}{y_{max}}\right)} = \frac{M_g}{W}$$

$$\sigma(y) = \frac{M_g y}{J_z}$$

$$d\sigma(y) = \frac{dM_g y}{J_z}$$

$$\frac{dM_g}{dx} = T$$

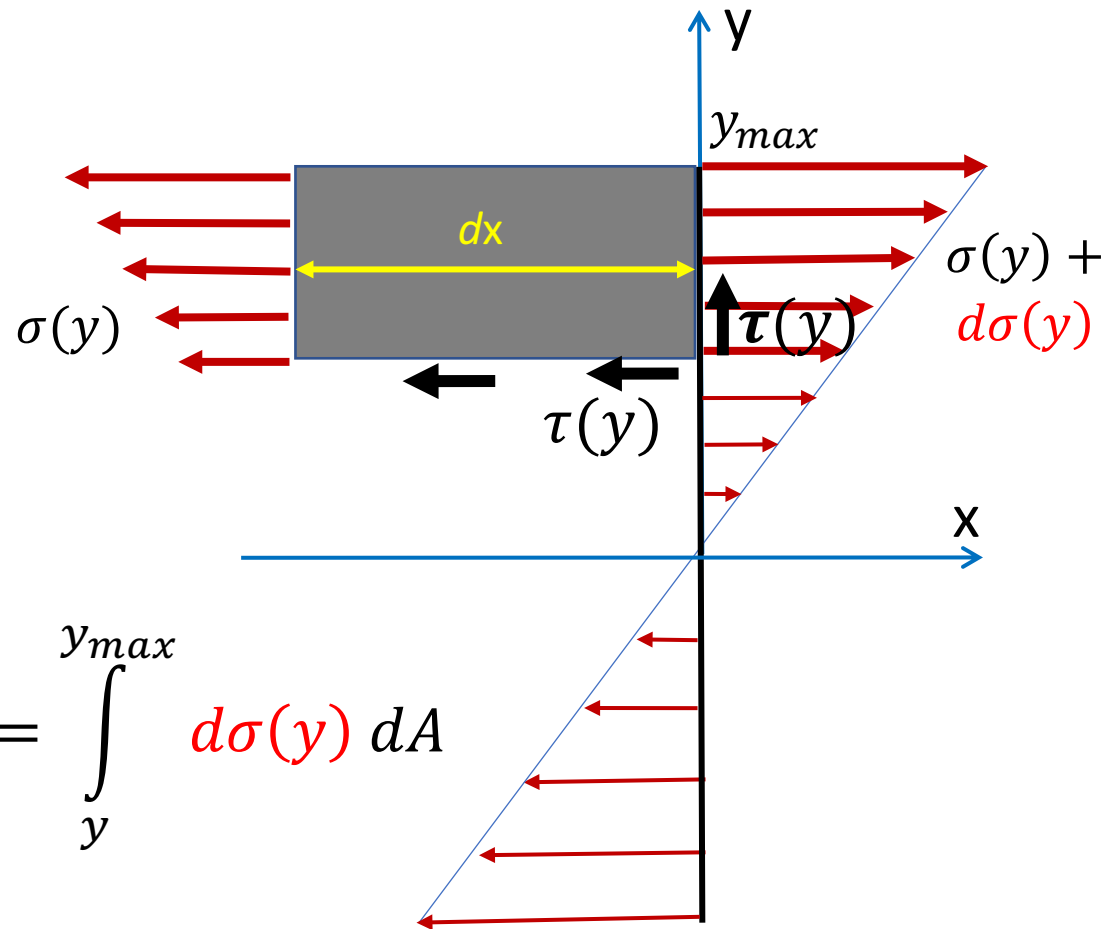
$$\tau(y) b dx = \int_y^{y_{max}} \frac{dM_g y}{J_z} dA$$

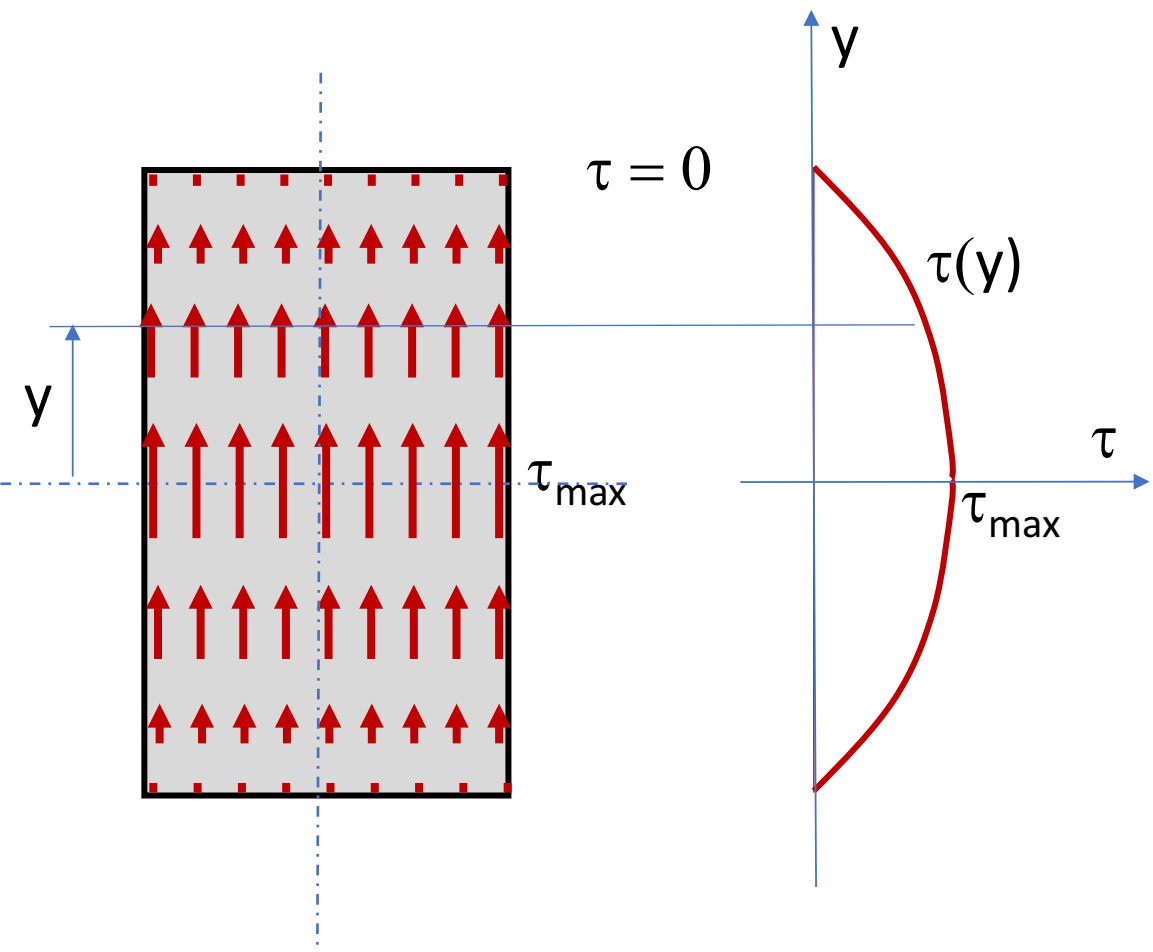
$$\tau(y) b dx = \frac{dM_g}{J_z} \int_y^{y_{max}} y dA$$

$$\tau(y) b dx = \int_y^{y_{max}} d\sigma(y) dA$$

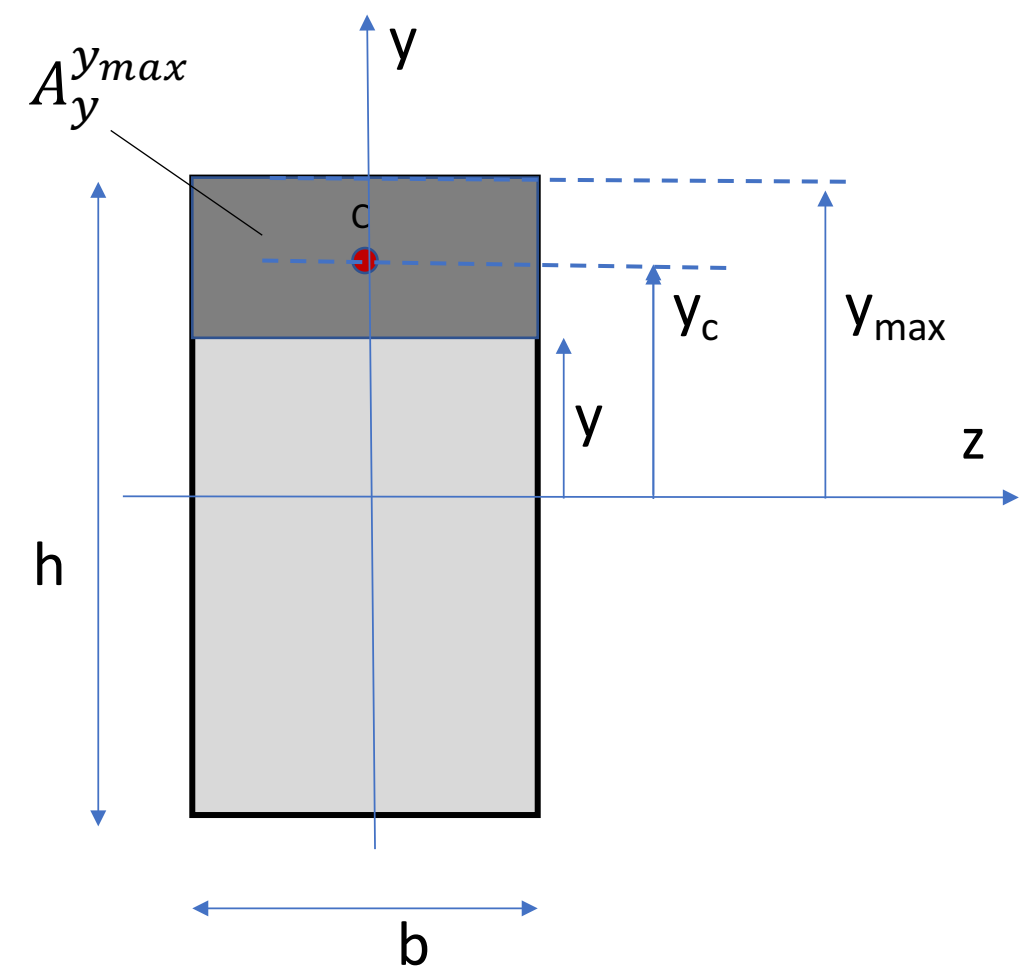
$$\tau(y) = \frac{T S_y^{y_{max}}}{b J_z}$$

$$S_y^{y_{max}} = \int_y^{y_{max}} y dA$$

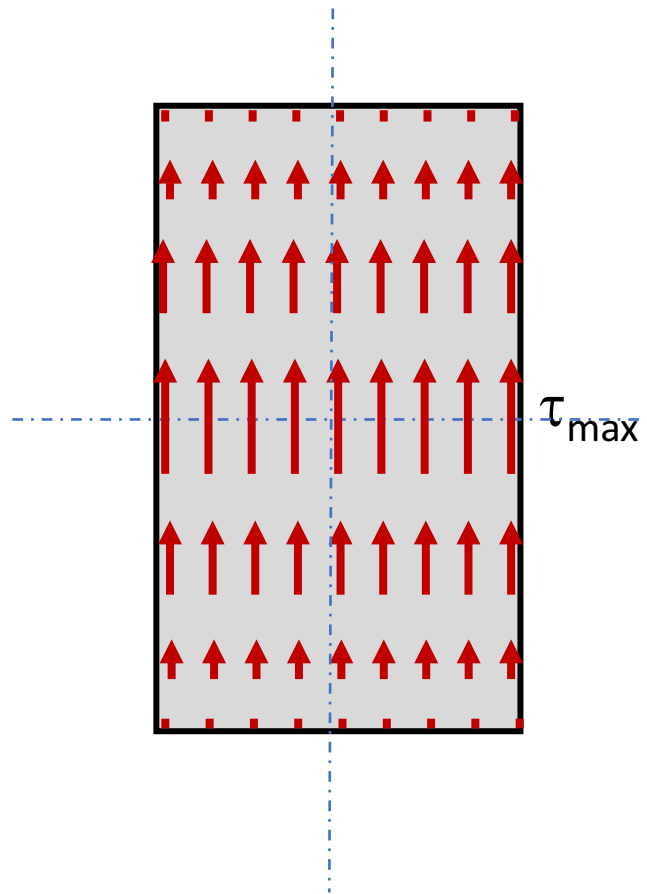




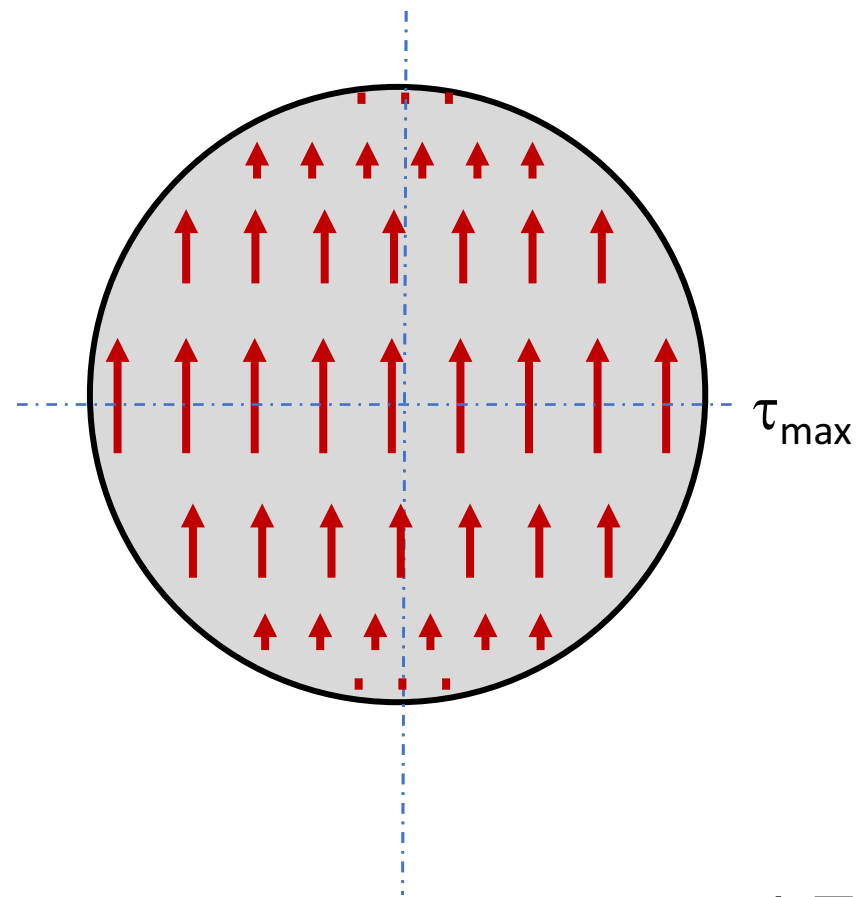
$$\tau(y) = \frac{T S_y^{y_{max}}}{b_y J_z}$$



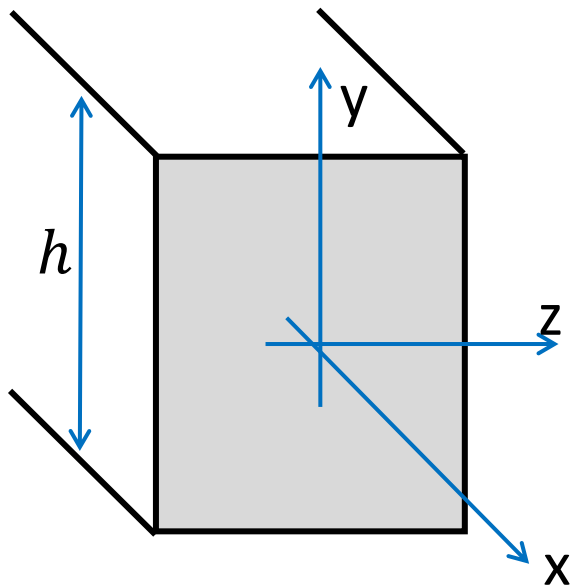
$$S_y^{y_{max}} = A_y^{y_{max}} y_c$$



$$\tau_{max} = \frac{3T}{2A}$$



$$\tau_{max} = \frac{4T}{3A}$$

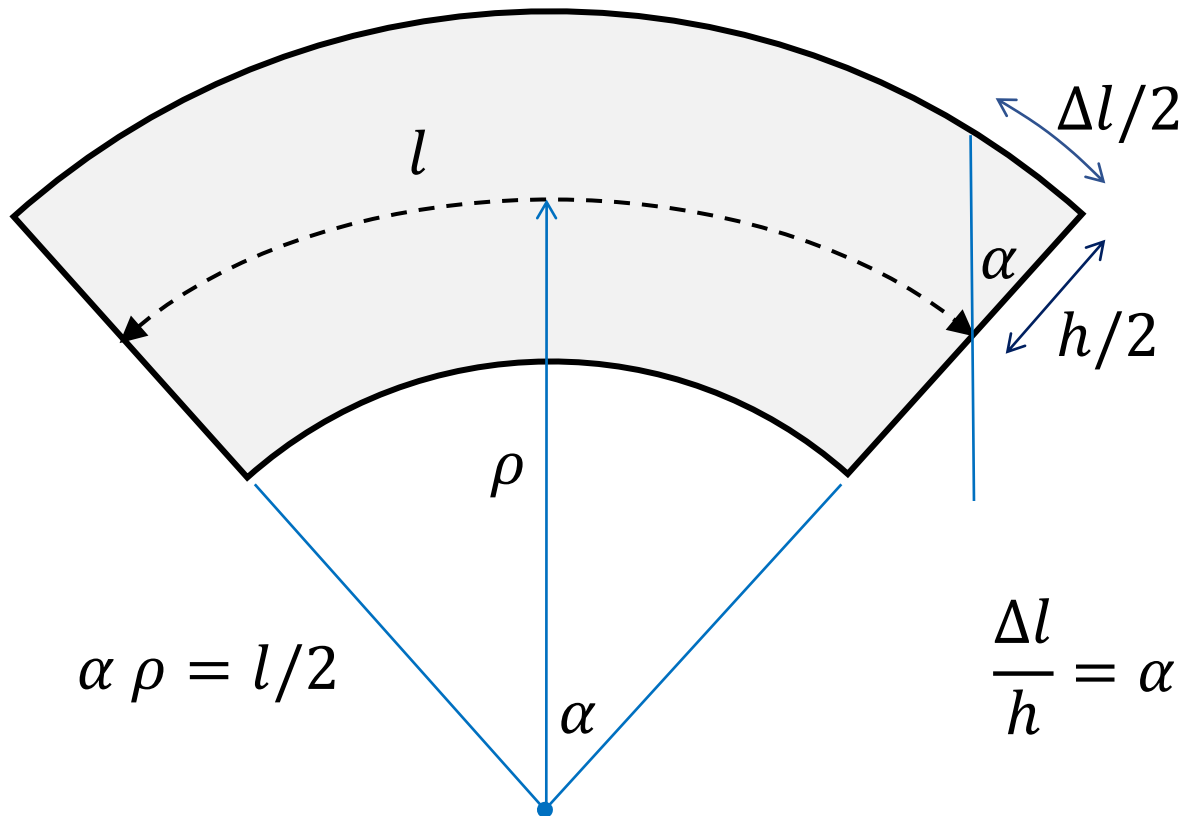


$$\sigma_{max} = \frac{M}{J_z} \frac{h}{2}$$

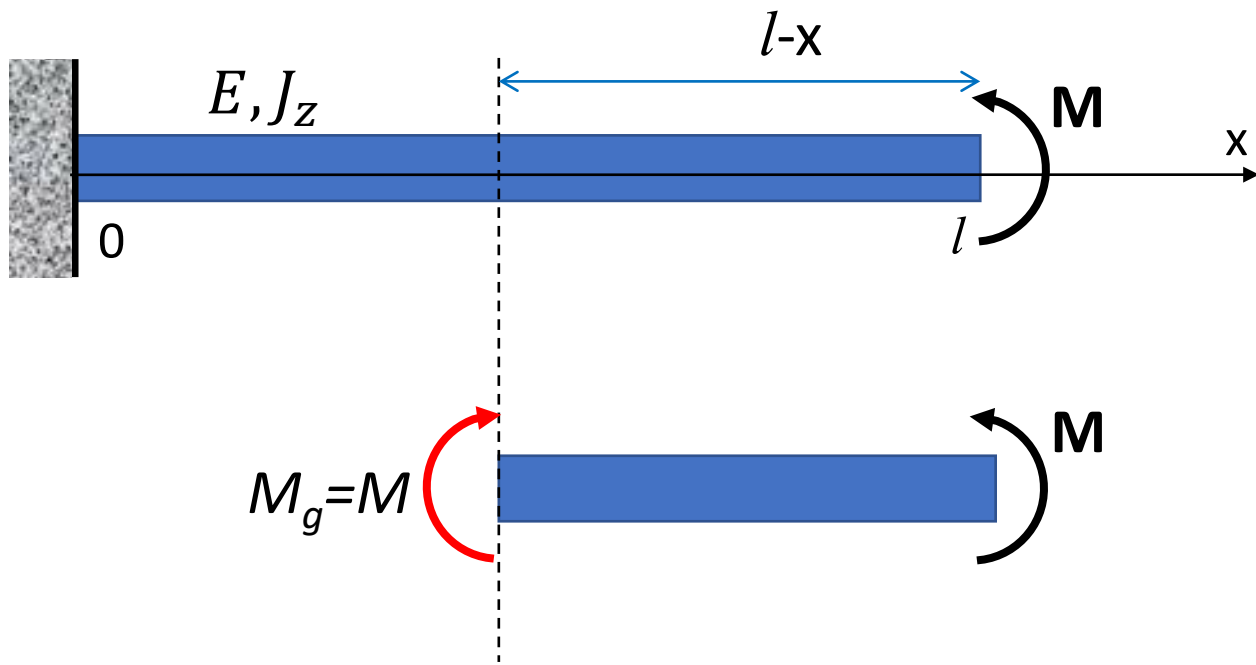
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_{max}}{E}$$

$$\frac{1}{\rho} = y''$$

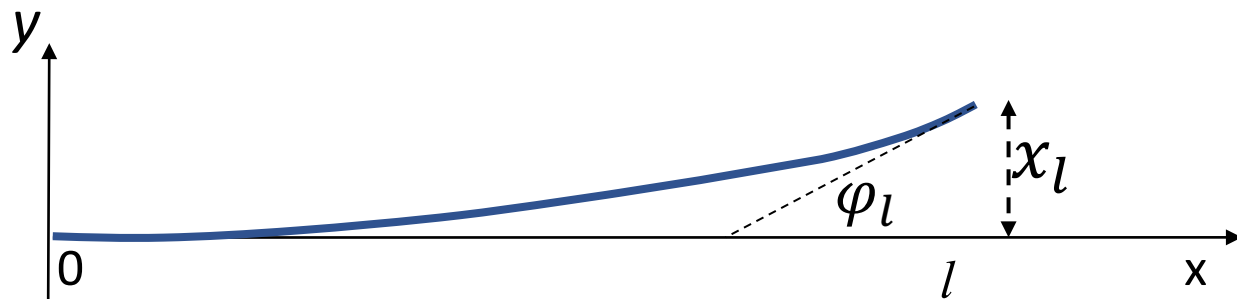
$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$



$$E J_z y''(x) = M(x)$$



$$M_g(x) = M = \text{const.}$$



$$x_l = \frac{M}{EJ_z} \frac{l^2}{2}$$

$$\varphi_l = \frac{M}{EJ_z} l$$

$$y'' = \frac{M}{EJ_z}$$

$$y' = \frac{M}{EJ_z} x + c_1$$

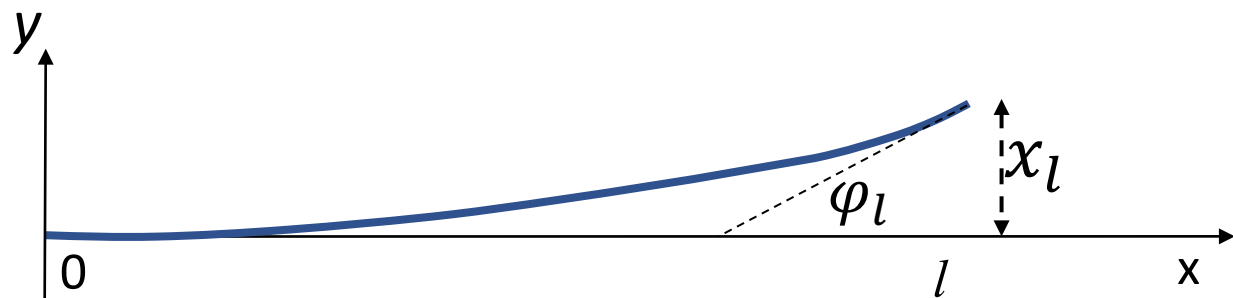
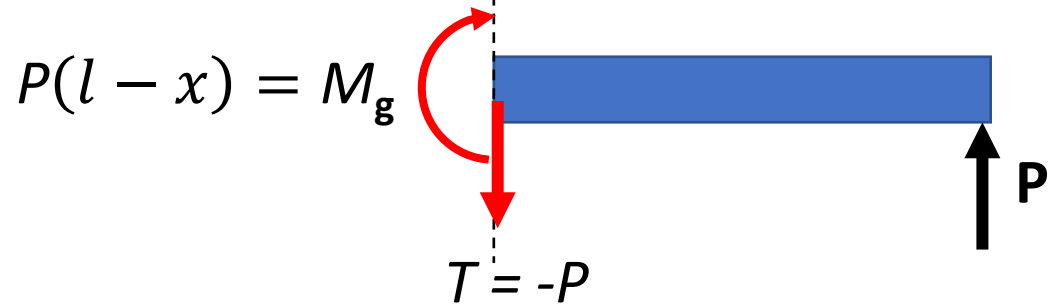
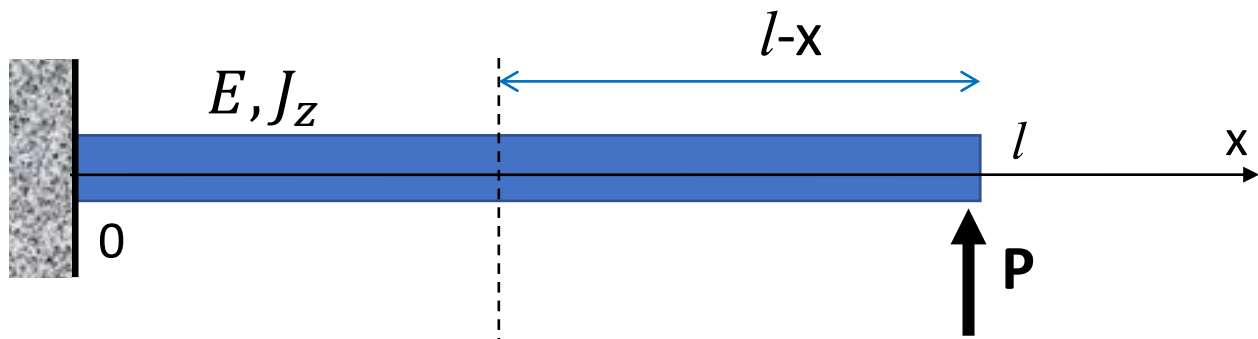
$$y = \frac{M}{EJ_z} \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$x = 0: \quad y = 0, \quad y' = 0$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

$$y = \frac{M}{EJ_z} \frac{x^2}{2}$$

$$y' = \varphi = \frac{M}{EJ_z} x$$



$$x_l = \frac{P}{EJ_z} \frac{l^3}{3}$$

$$\varphi_l = \frac{P}{EJ_z} \frac{l^2}{2}$$

$$y''' = \frac{1}{EJ_z} (Pl - Px)$$

$$y' = \frac{1}{EJ_z} \left(Plx - P \frac{x^2}{2} + c_1 \right)$$

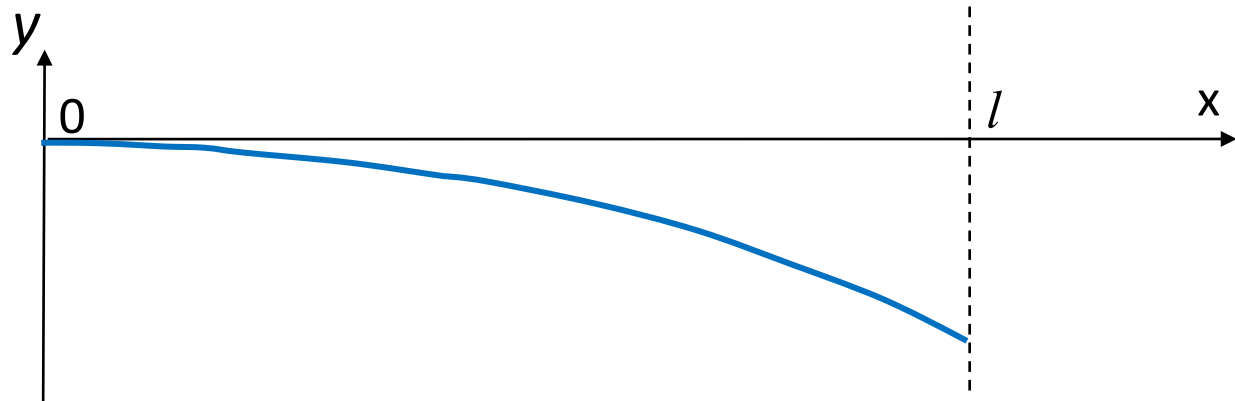
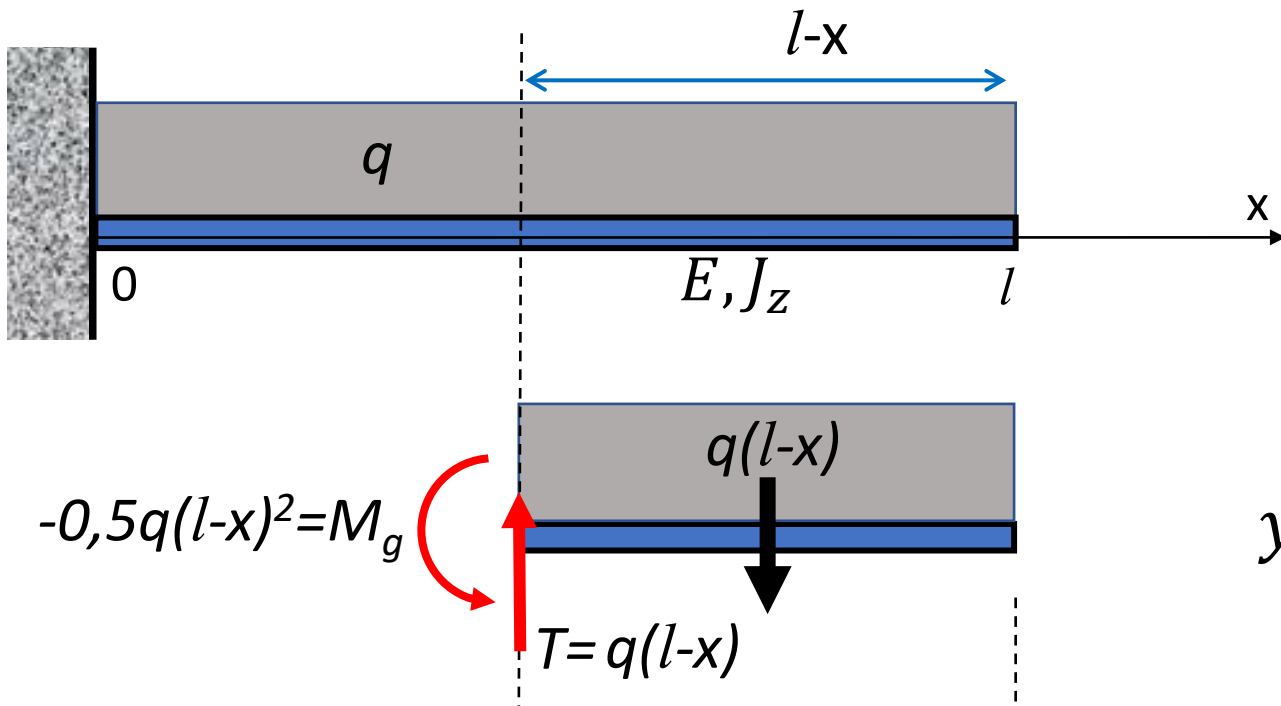
$$y = \frac{1}{EJ_z} \left(Pl \frac{x^2}{2} - P \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \right)$$

$$x = 0: \quad y = 0, \quad y' = 0$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left(Pl \frac{x^2}{2} - P \frac{x^3}{6} \right)$$

$$y' = \varphi = \frac{1}{EJ_z} \left(Plx - P \frac{x^2}{2} \right)$$



$$y'' = \frac{-1}{EJ_z} 0,5q(l-x)2$$

$$y' = \frac{-0,5q}{EJ_z} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} + c_1 \right)$$

$$y = \frac{-0,5q}{EJ_z} \left(l^2 \frac{x^2}{2} - l \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + xc_1 + c_2 \right)$$

$$x = 0: \quad y = 0, \quad y' = 0$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

$$y = \frac{-0,5q}{EJ_z} \left(l^2 \frac{x^2}{2} - l \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

$$y' = \frac{-0,5q}{EJ_z} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right)$$

$$T = \frac{dM_g}{dx}$$

$$q = -\frac{dT}{dx}$$

$$EJ_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M(x) = M_x$$

Zakładamy: $M_x = q_f$

$$q_f = -\frac{dT_f}{dx} = -\frac{d^2 M_f}{dx^2}$$

$$EJ_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M_x = q_f = -\frac{dT_f}{dx} = -\frac{d^2 M_f}{dx^2}$$

$$EJ_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{d^2 M_f}{dx^2}$$

$$EJ_z \frac{d y(x)}{dx} = -\frac{d M_f}{dx} + C$$

$$EJ_z y = -M_f + Cx + D$$

$$C = D = 0$$

$$y = -\frac{M_f}{EJ}$$

$$\varphi = -\frac{T_f}{EJ}$$

Zakładamy: $M_x = q_f$

$$EJ_z \frac{d y(x)}{dx} = -\frac{d M_f}{dx} + C$$

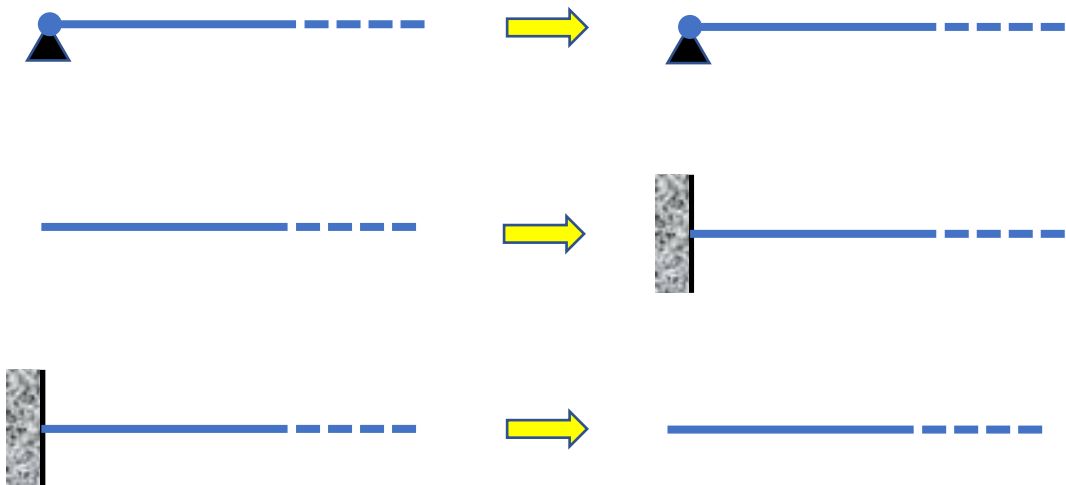


$$\varphi = -\frac{T_f}{EJ}$$

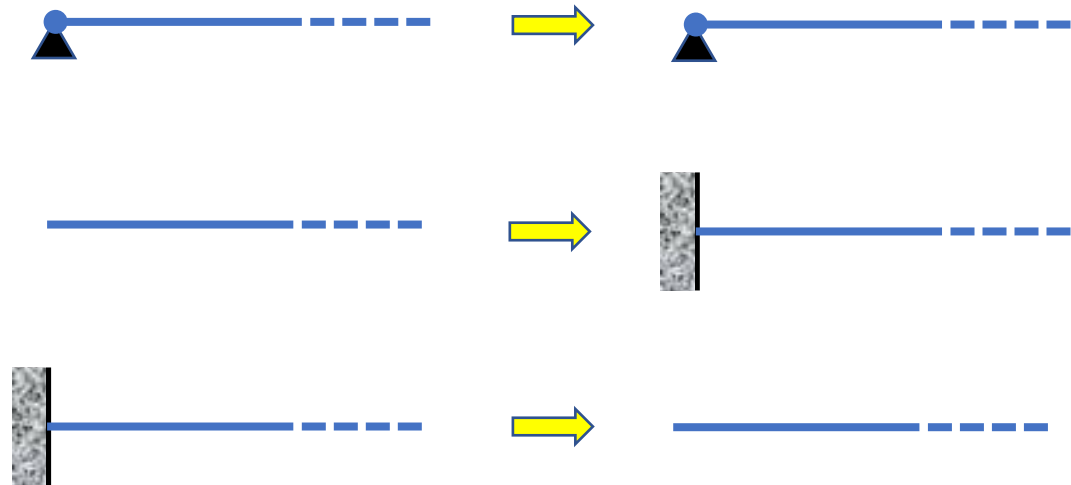
$$EJ_z y = -M_f + Cx + D$$



$$y = -\frac{M_f}{EJ}$$

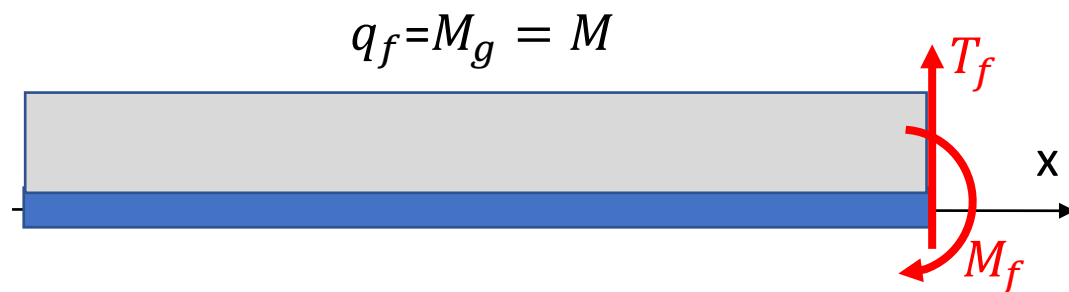
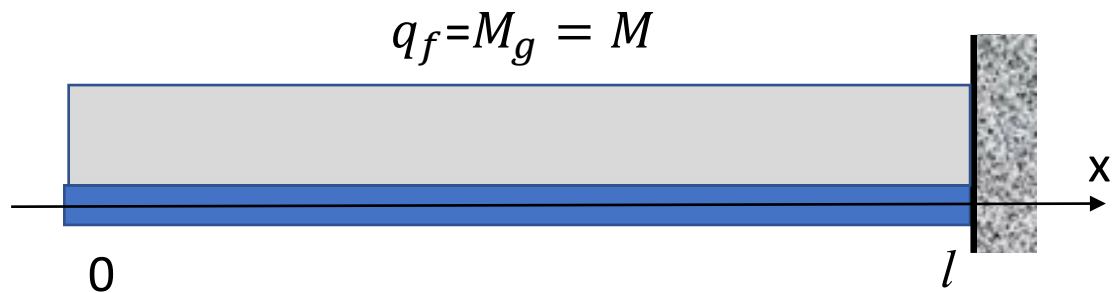
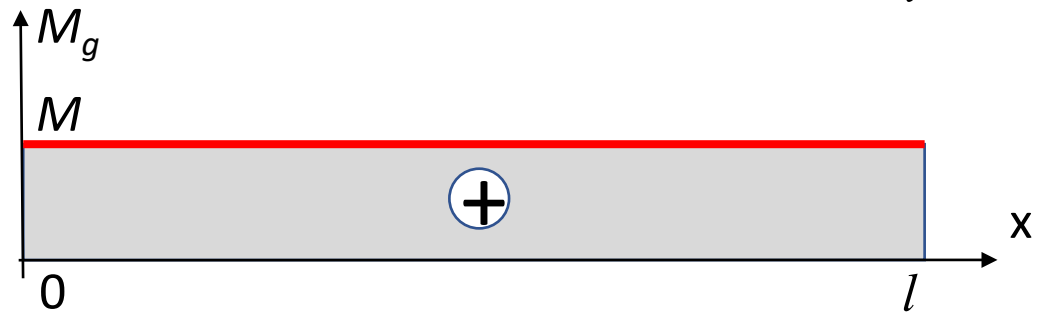


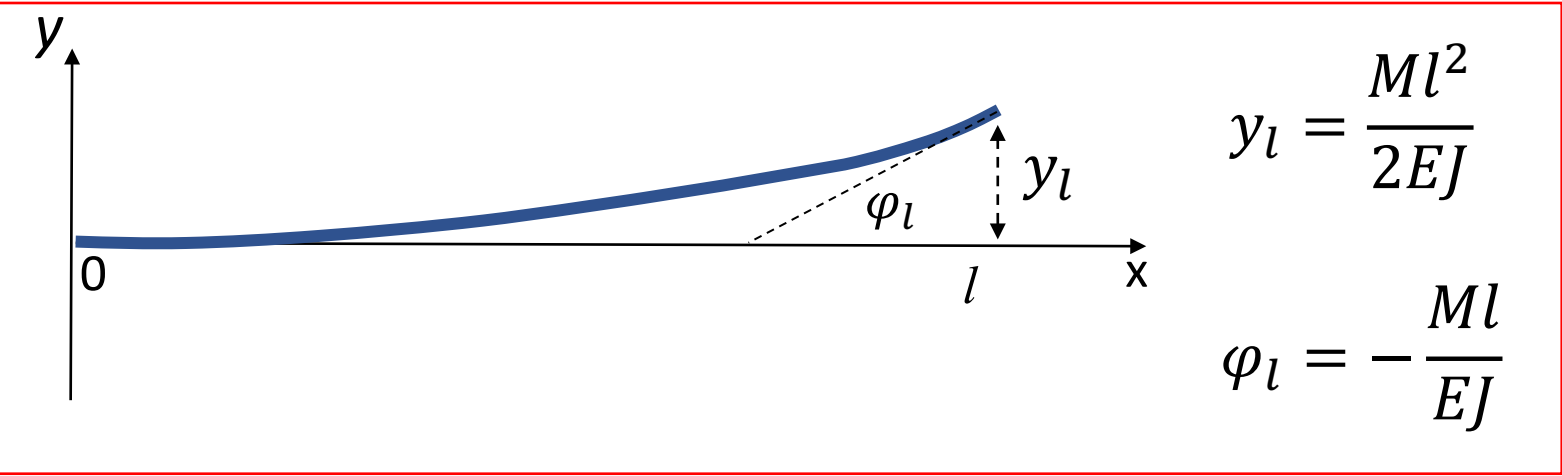
$$C = D = 0$$



$$y = -\frac{M_f}{EJ}$$

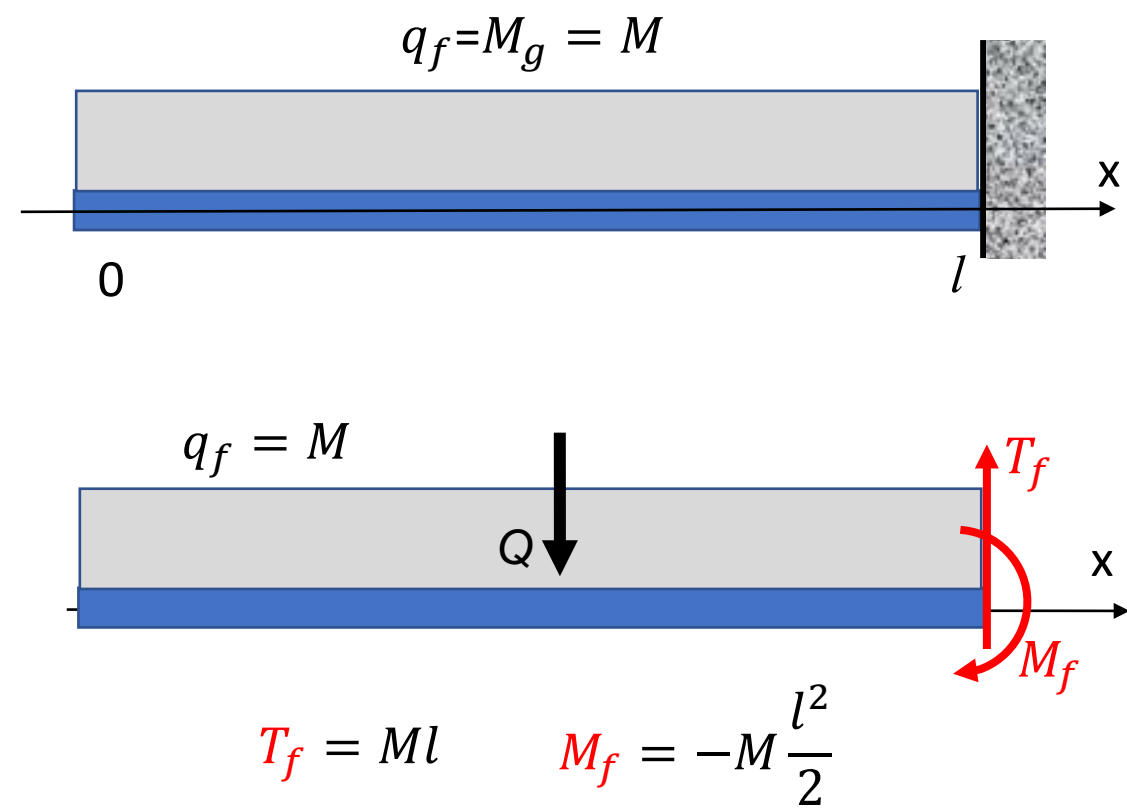
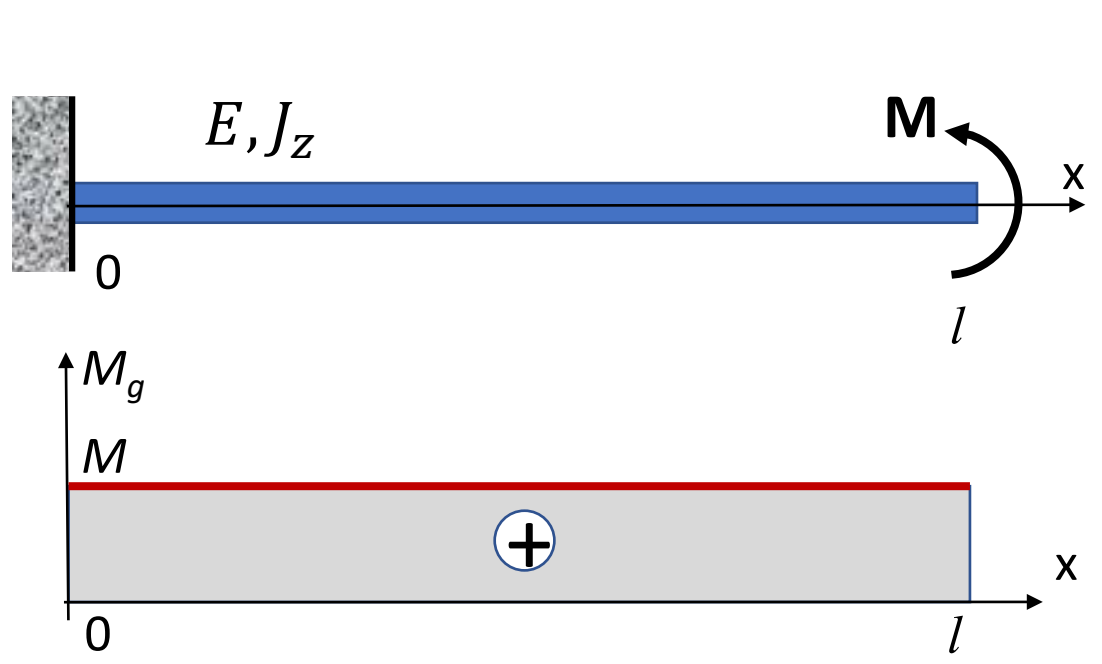
$$\varphi = -\frac{T_f}{EJ}$$





$$y = -\frac{M_f}{EJ}$$

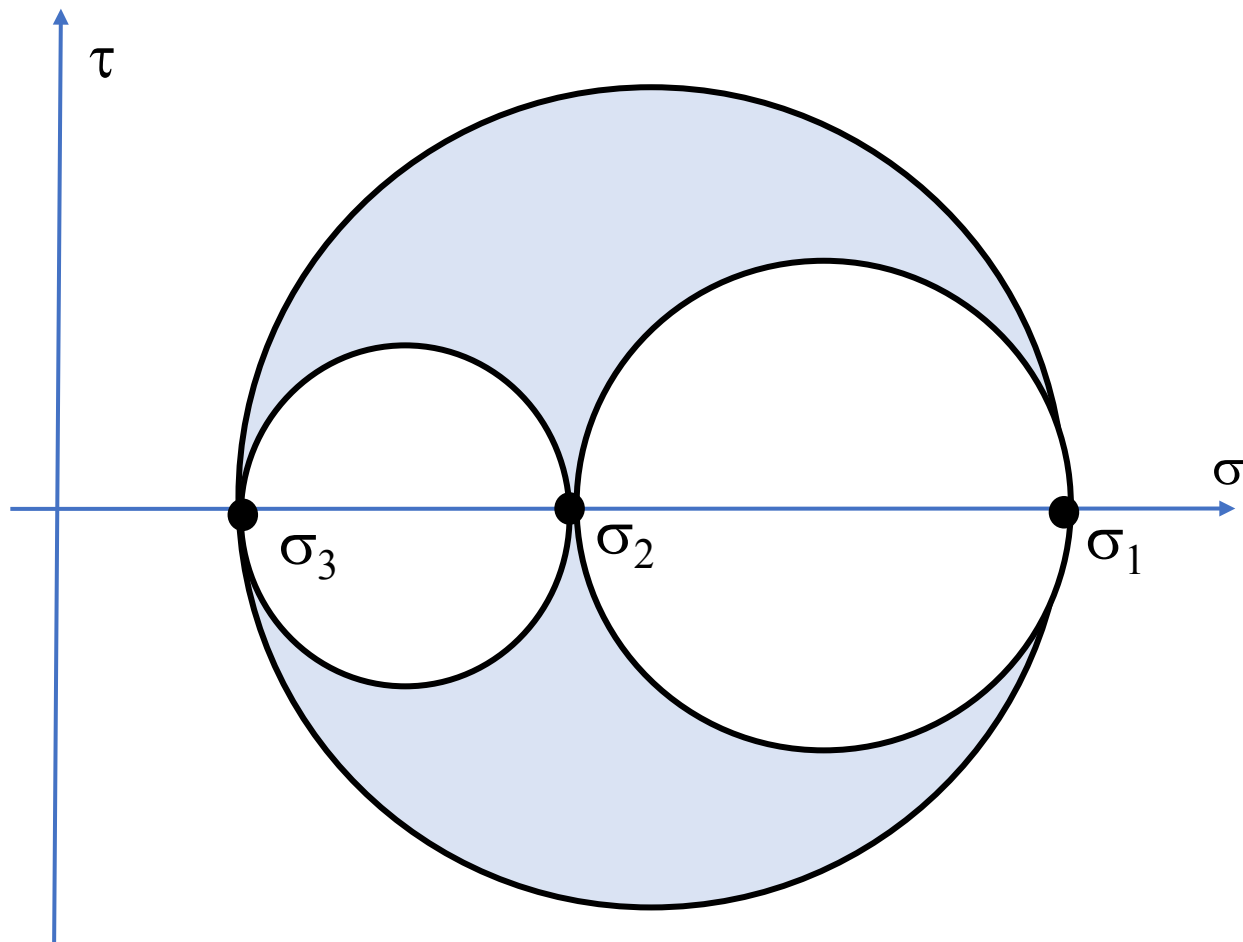
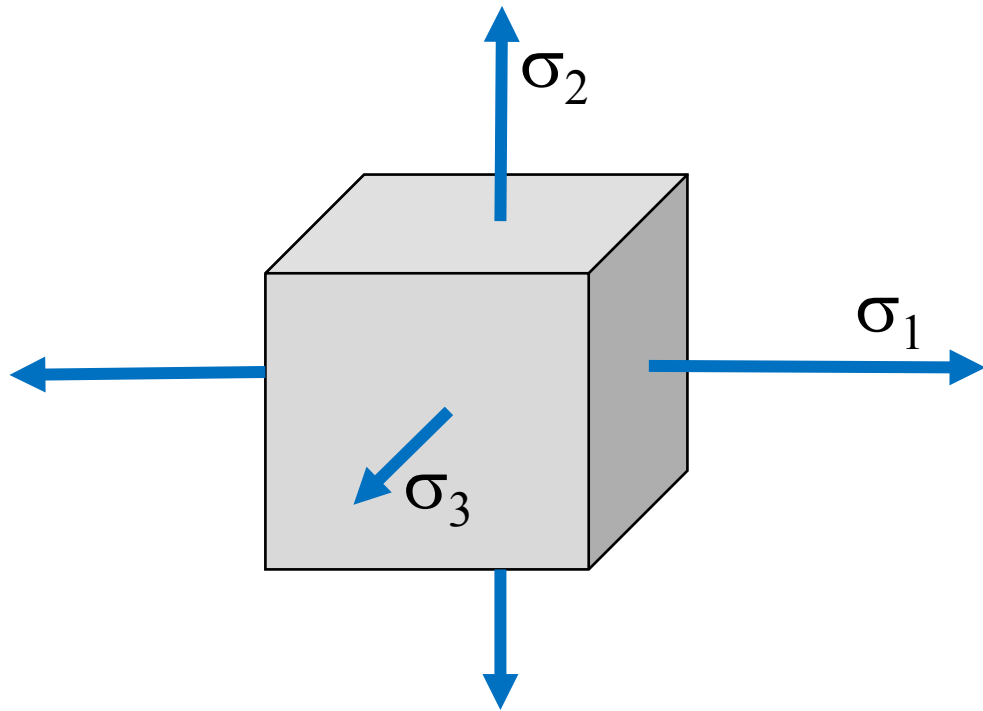
$$\varphi = -\frac{T_f}{EJ}$$



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

**WYTRZYMAŁOŚĆ ZŁOŻONA
HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE**



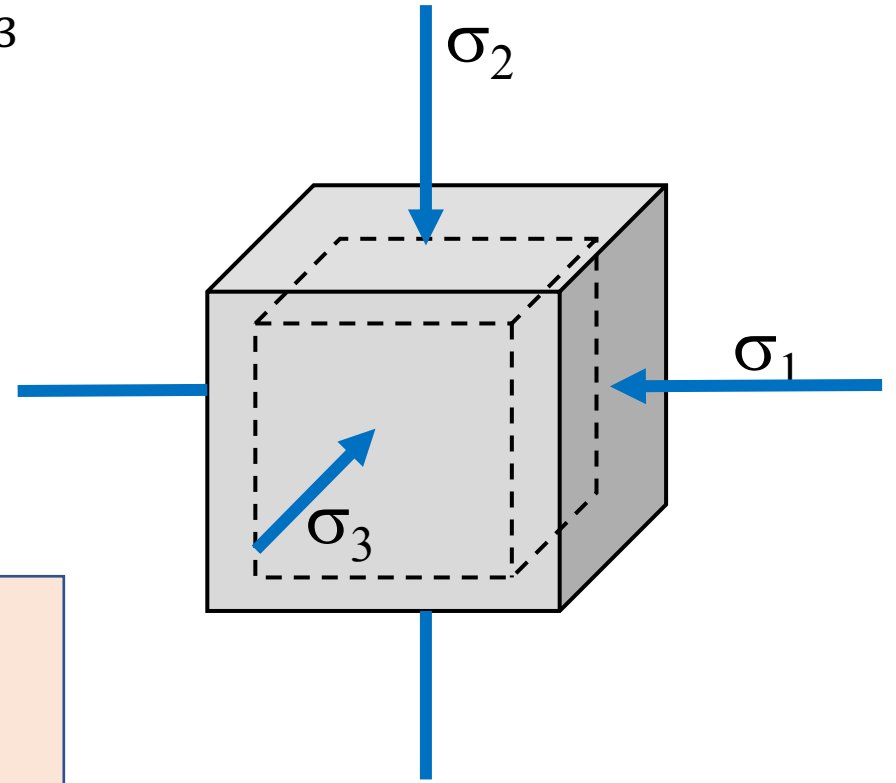
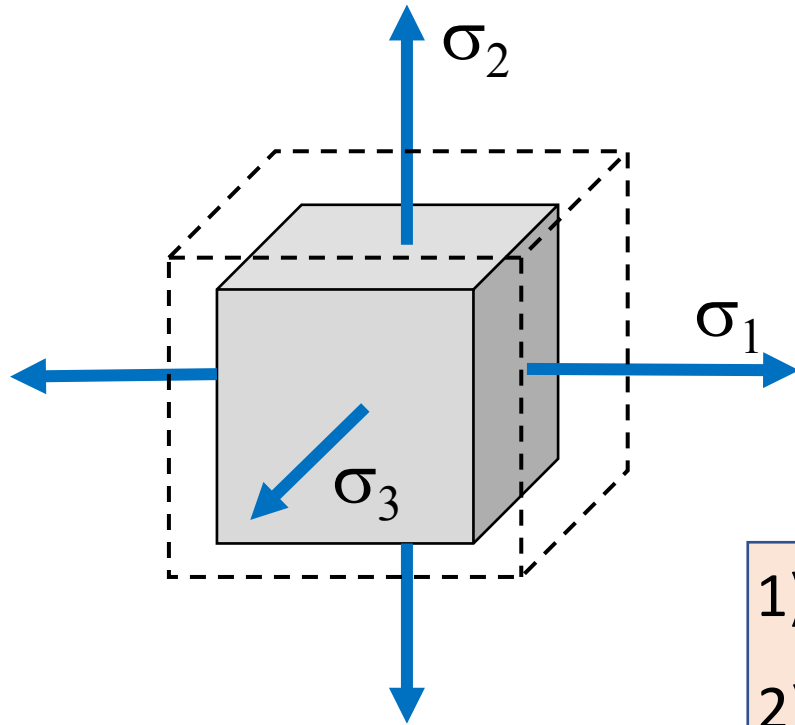


$$\sigma_{\max} = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = \sigma_{\min}$$

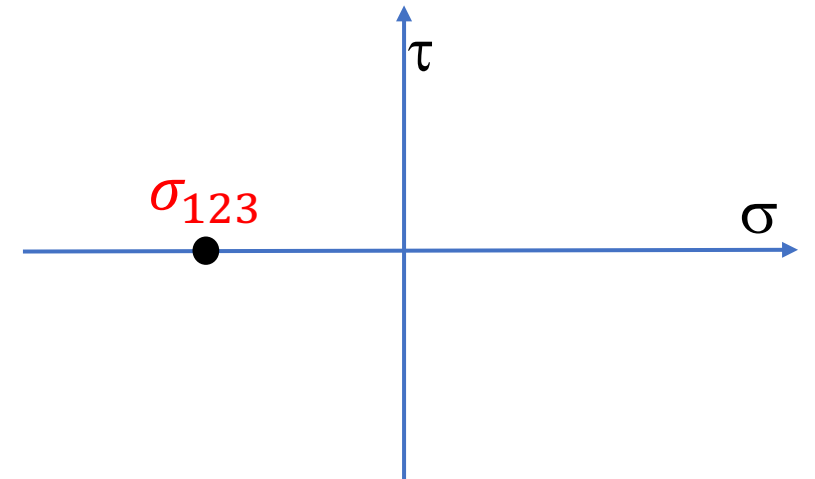
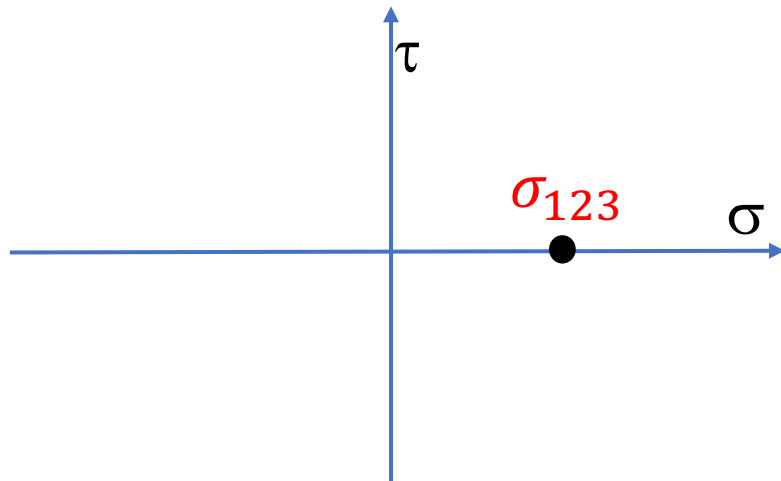
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

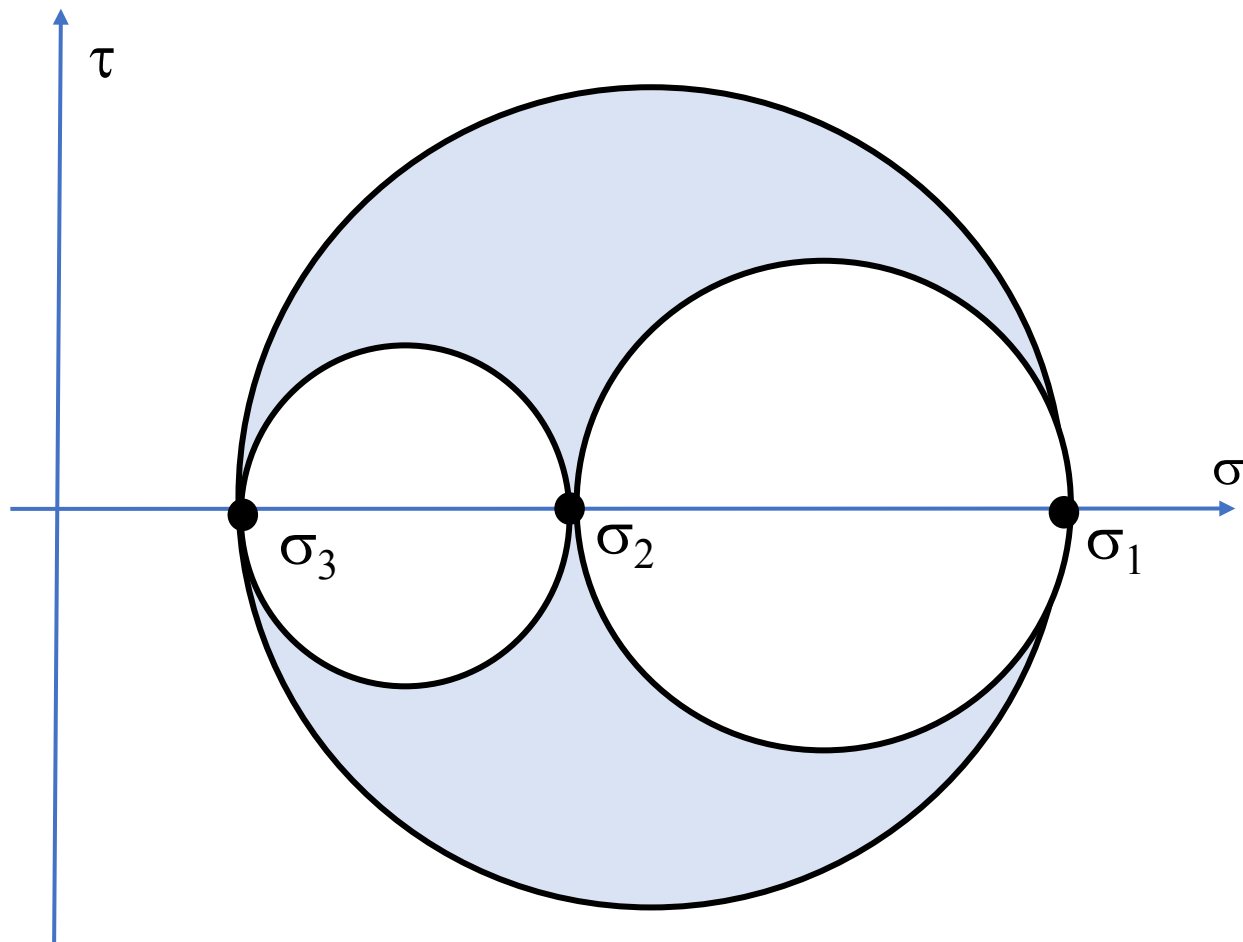
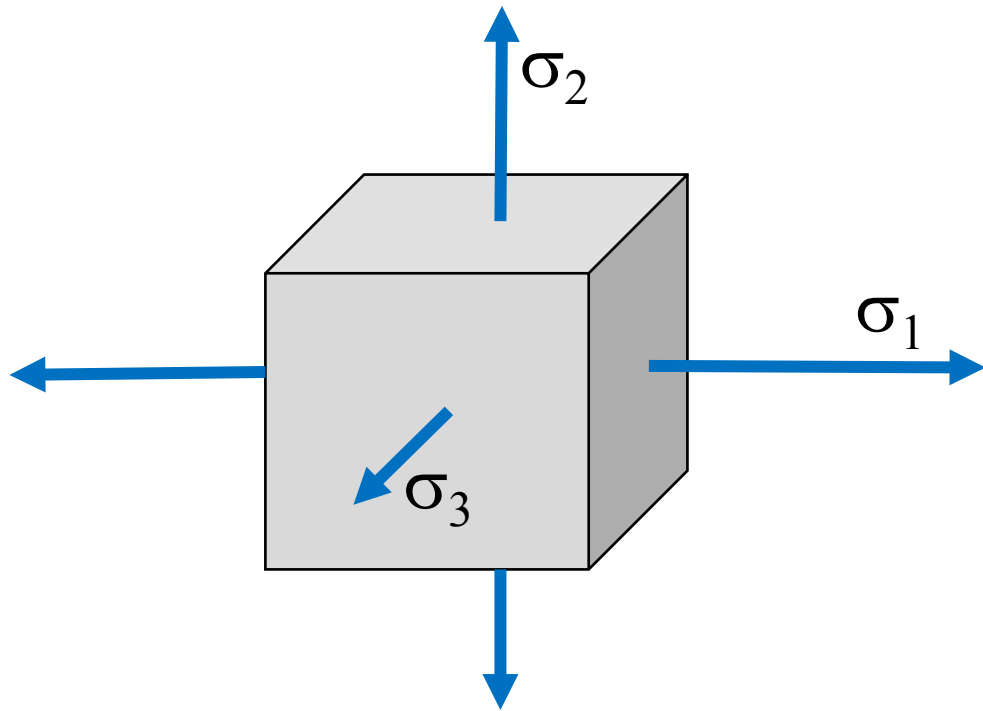
$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{123}$$



- 1) $\tau_{max} = 0$
- 2) odkształcenie objętościowe

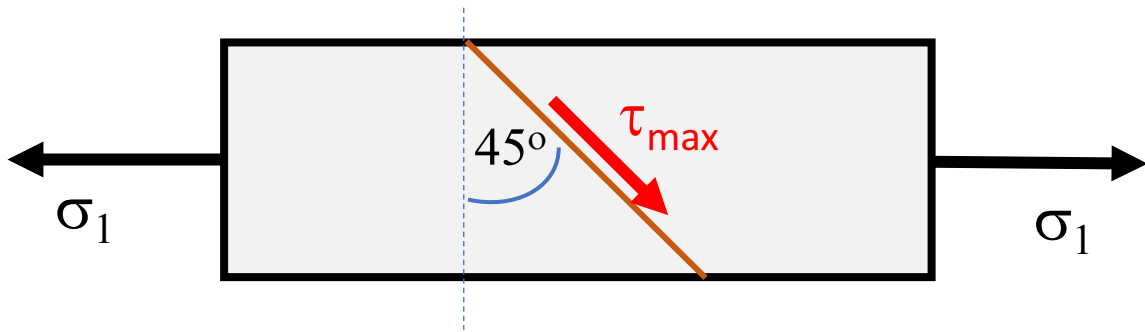




$$\sigma_{\max} = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = \sigma_{\min}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$



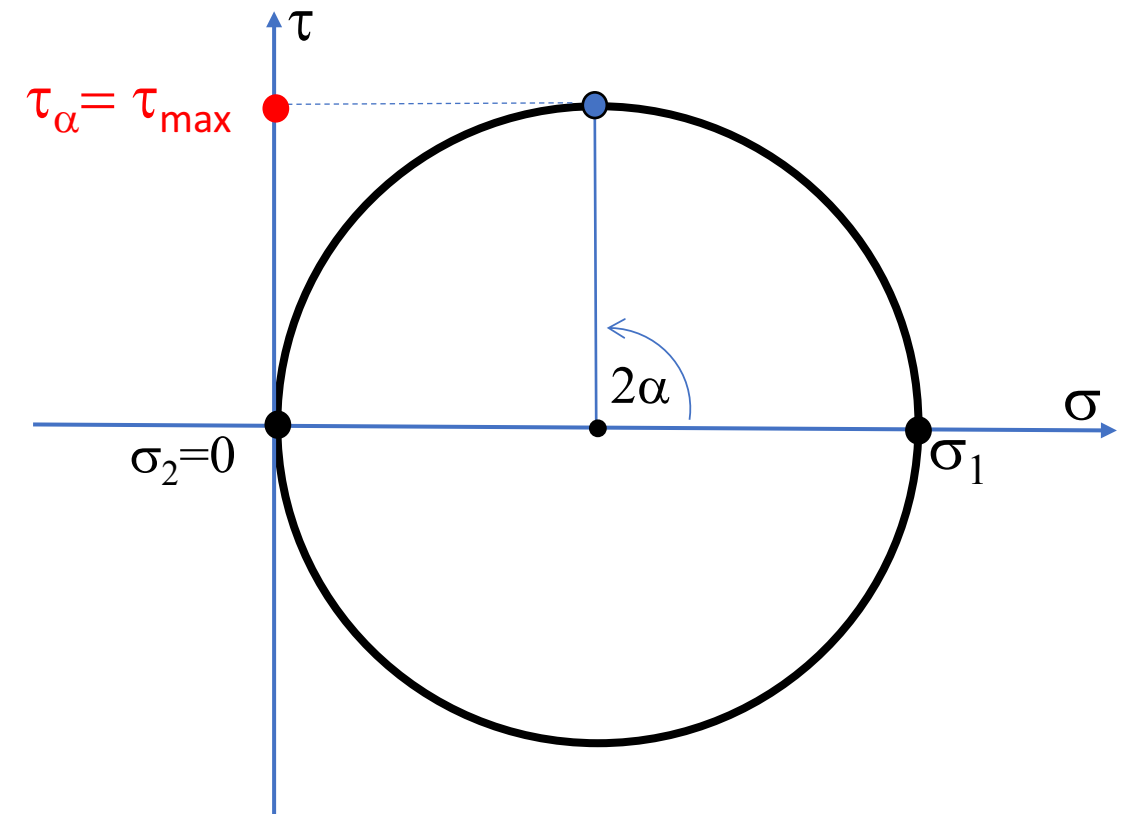
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$$

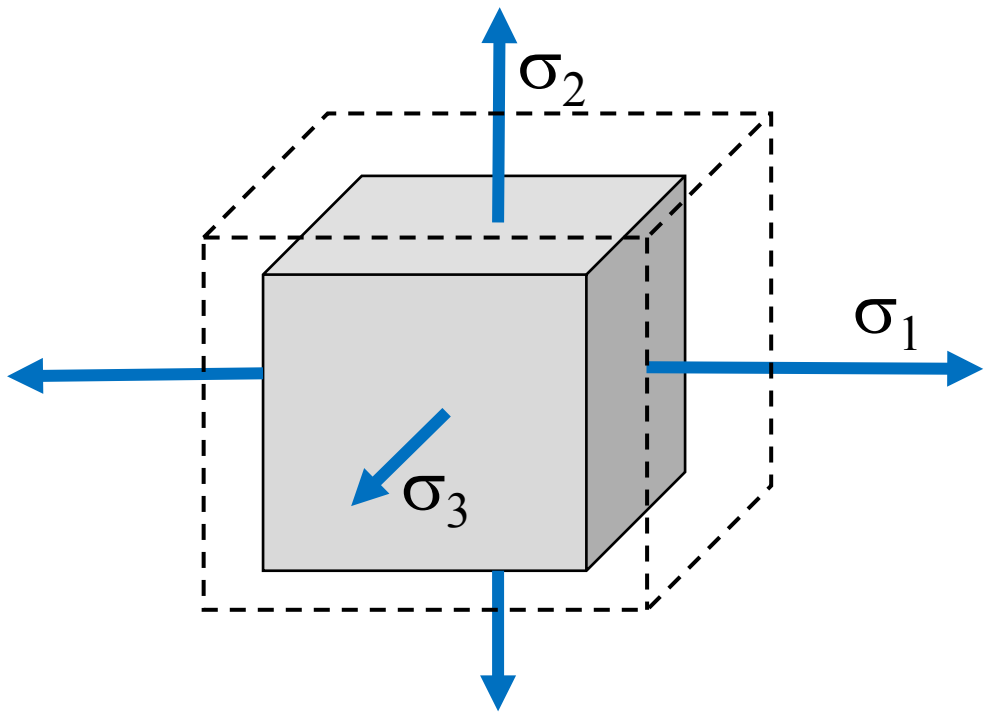
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

1D: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$

3D: $\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

$$\sigma_{zred}^T = \sigma_{max} - \sigma_{min}$$





$$V = l^3$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}$$

$$V + \Delta V = (l + l\varepsilon_1)(l + l\varepsilon_2)(l + l\varepsilon_3) = l^3(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx V(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$V + \Delta V = V \left[1 + \frac{1}{E}(1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = V + \frac{V}{E}(1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

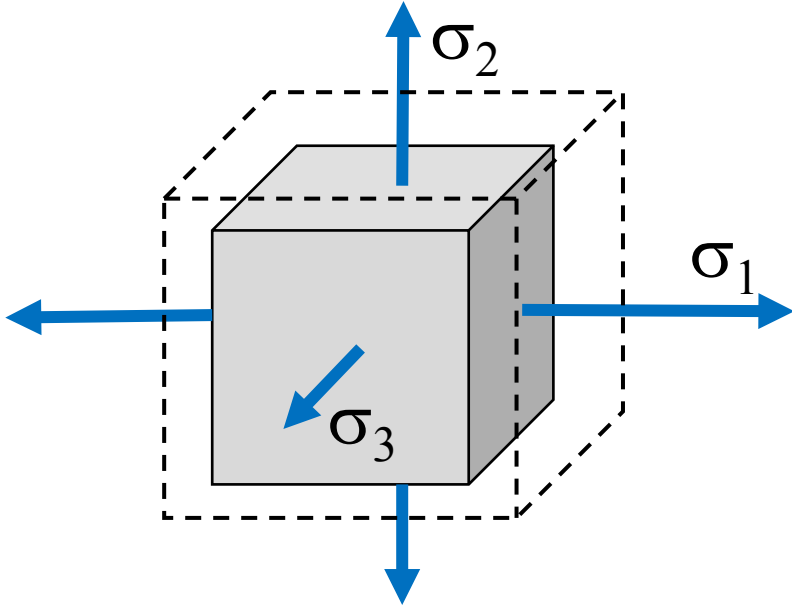
$$\Delta V = \frac{V}{E}(1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$



$$L = \frac{1}{2} \Delta l P = \frac{1}{2} l \varepsilon A \sigma = \frac{V}{2} \varepsilon \sigma$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$L \sim \varepsilon \sigma \rightarrow L \sim \sigma^2$$



$$L = \frac{V}{2} (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2 + \varepsilon_3 \sigma_3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} \end{aligned}$$

$$L = \frac{V}{6E} (1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{V}{6E} (1 + \nu)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

$$L = L_{obj} + L_{post}$$

$$L = \underbrace{\frac{V}{6E} (1 - 2\nu) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}_{L_{obj}} + \underbrace{\frac{V}{6E} (1 + \nu) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}_{L_{post}}$$

$$\Delta V = \frac{V}{E} (1 - 2\nu) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$L \sim \sigma^2$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$3D: \quad L_{post} = \frac{V}{6E} (1 + \nu) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

$$1D: \quad L_{post} = \frac{V}{6E} (1 + \nu) 2\sigma_1^2$$

$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

$$\sigma_{zred}^T = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = \sigma_{\min}$$

$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$



$$\sigma_r = \frac{P}{A} \quad \sigma_g = \frac{M}{W}$$

$$\sigma_1 = \sigma_r + \sigma_g$$

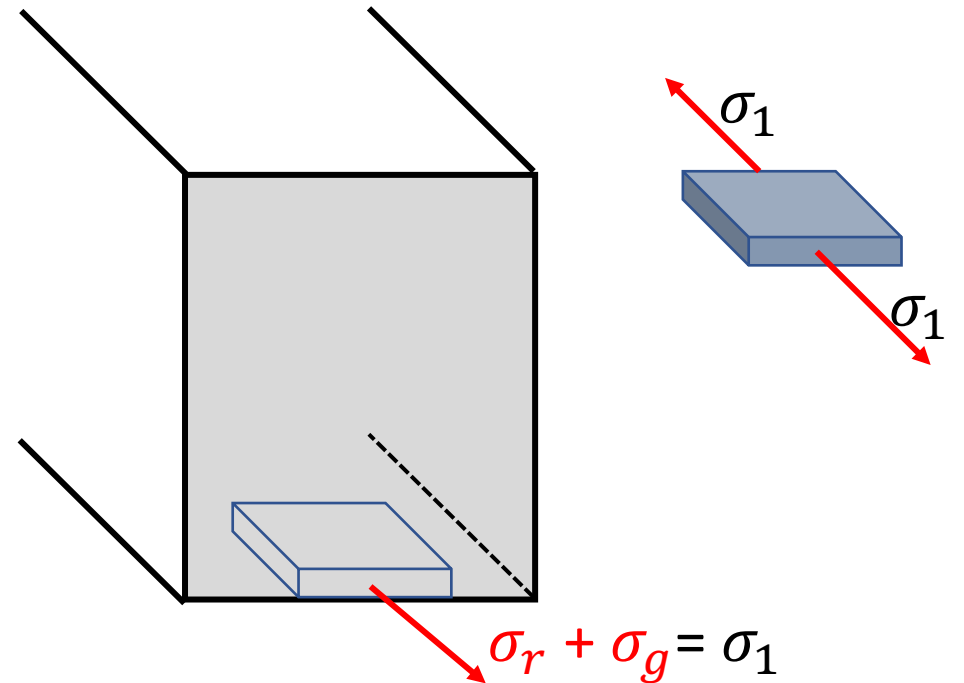
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

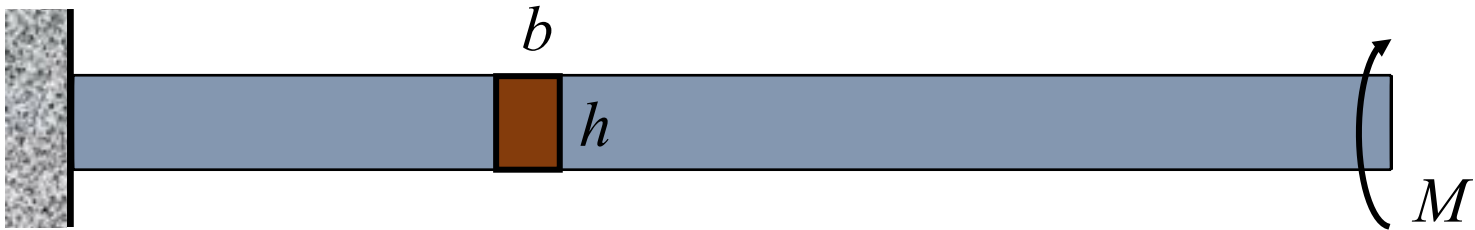
$$\sigma_{zred}^T = \sigma_{\max} - 0 = \sigma_r + \sigma_g$$

$$\sigma_{zred}^T = \sigma_r + \sigma_g$$

$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2]}$$

$$\sigma_{zred}^H = \sigma_r + \sigma_g$$

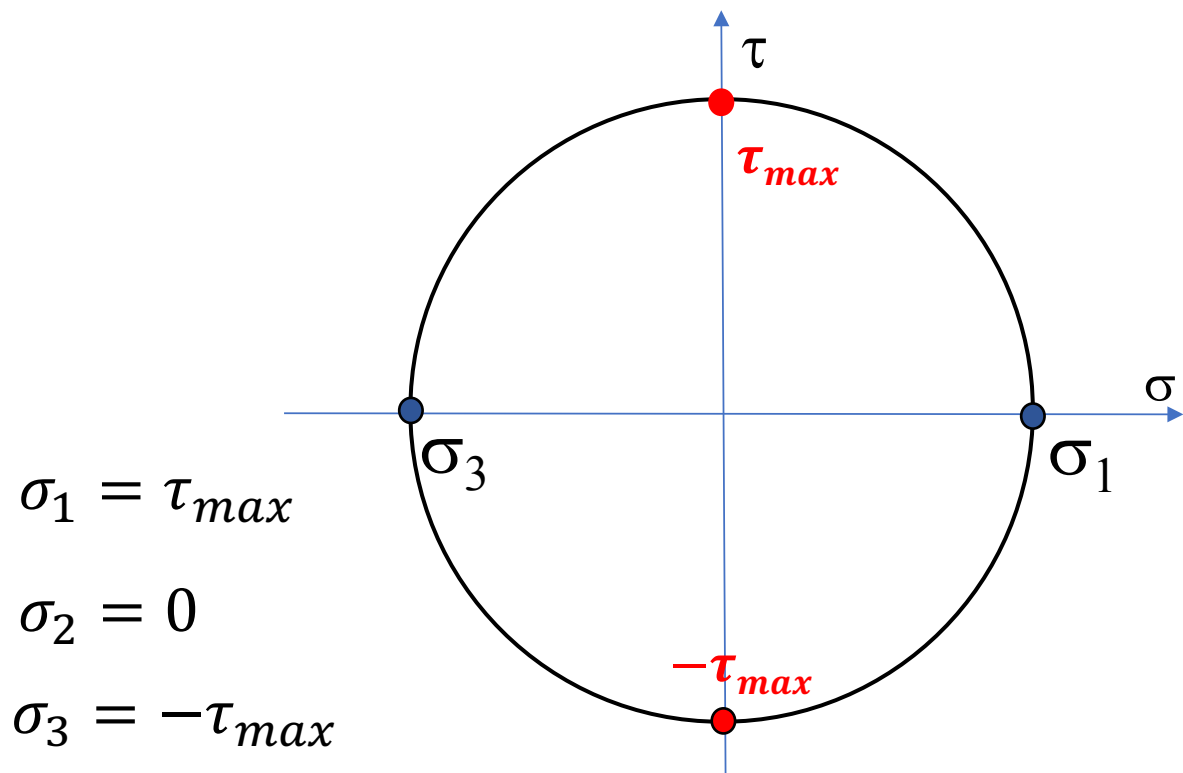




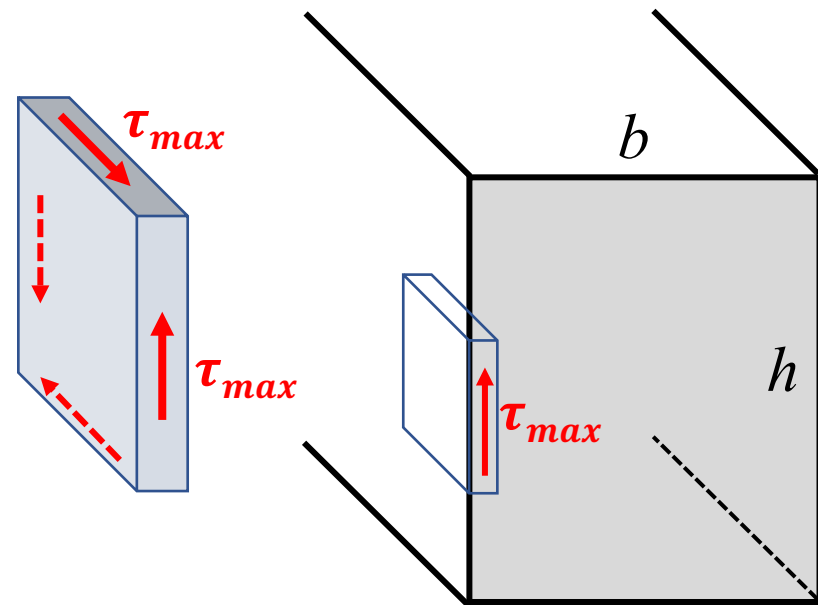
$$\sigma_{zred}^T = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max}$$

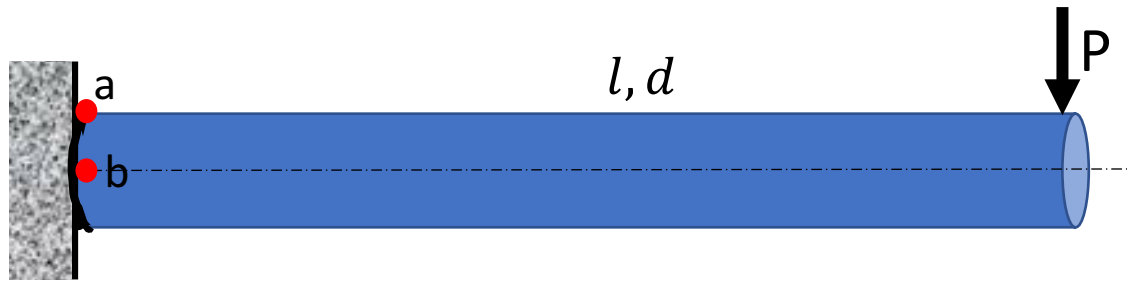
$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\frac{1}{2} [(\tau_{max} - 0)^2 + (0 + \tau_{max})^2 + (\tau_{max} + \tau_{max})^2]}$$

$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{2} \tau_{max}$$



$$\tau_{max} = \frac{M}{\alpha h b^2}$$





$P = 5000$
 $l = 2$
 $d = 0,05$

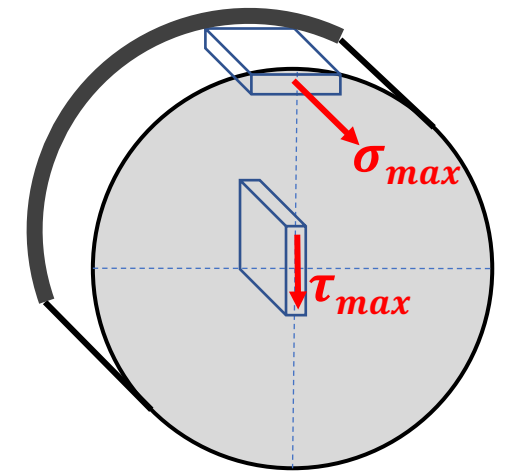
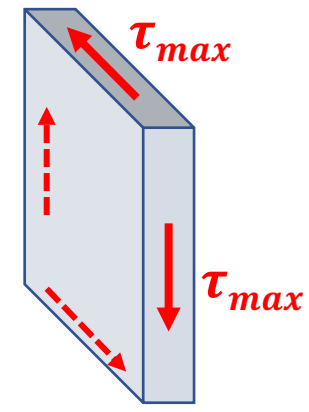
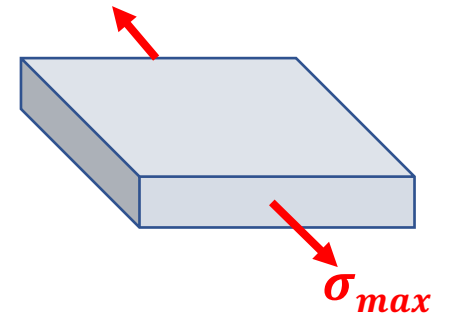
$$\sigma_{max} = \frac{Pl}{\frac{\pi d^3}{32}} = 815 \cdot 10^6$$

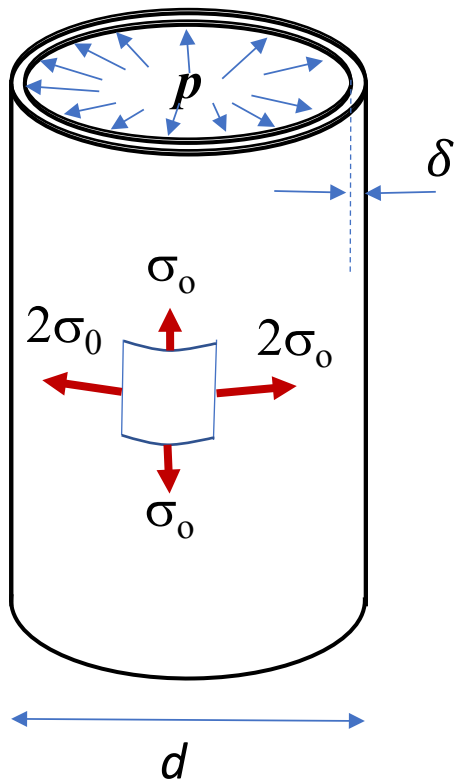
a: $\sigma_{zred}^T = \sigma_{max}$
 $\sigma_{zred}^H = \sigma_{max}$

pomijalne

$$\tau_{max} = \frac{4P}{3 \frac{\pi d^2}{4}} = 3,4 \cdot 10^6$$

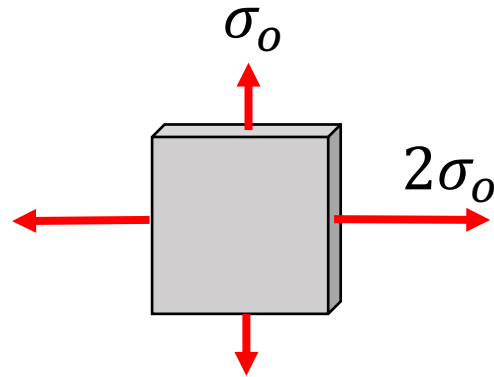
b: $\sigma_{zred}^T = 2\tau_{max}$
 $\sigma_{zred}^H = \sqrt{2} \tau_{max}$





$$\sigma_0 = \frac{p d}{4 \delta}$$

$$\sigma_3 = 0 < \sigma_2 = \sigma_0 < \sigma_1 = 2\sigma_0$$

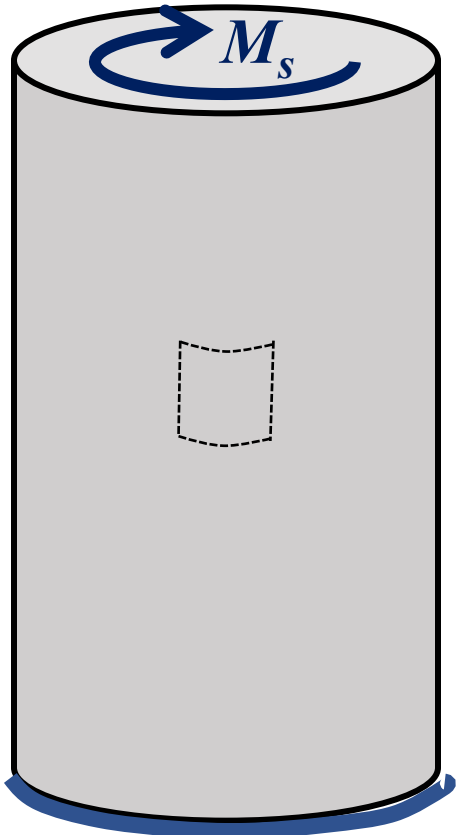


$$\sigma_{zred}^T = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{zred}^T = 2\sigma_0$$

$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

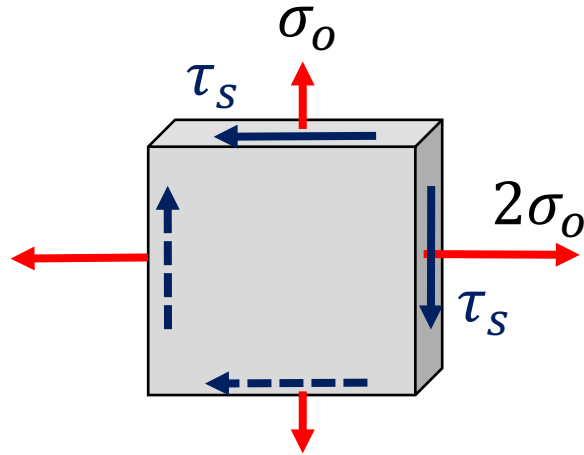
$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{3} \sigma_0$$



$$d, \delta, \rho, M_s$$

$$d_{sr} = d$$

$$A_{sr} = \frac{\pi d_{sr}^2}{4}$$



$$\sigma_o = \frac{p d}{4 \delta}$$

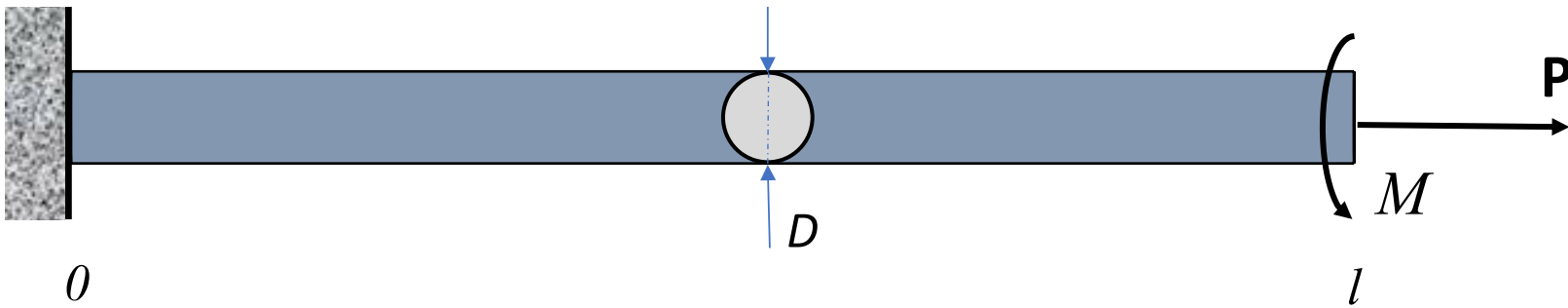
$$\tau_s = \frac{M_s}{2 \delta A_{sr}}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{2\sigma_o + \sigma_o}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\sigma_o - \sigma_o}{2}\right)^2 + \tau_s^2}$$

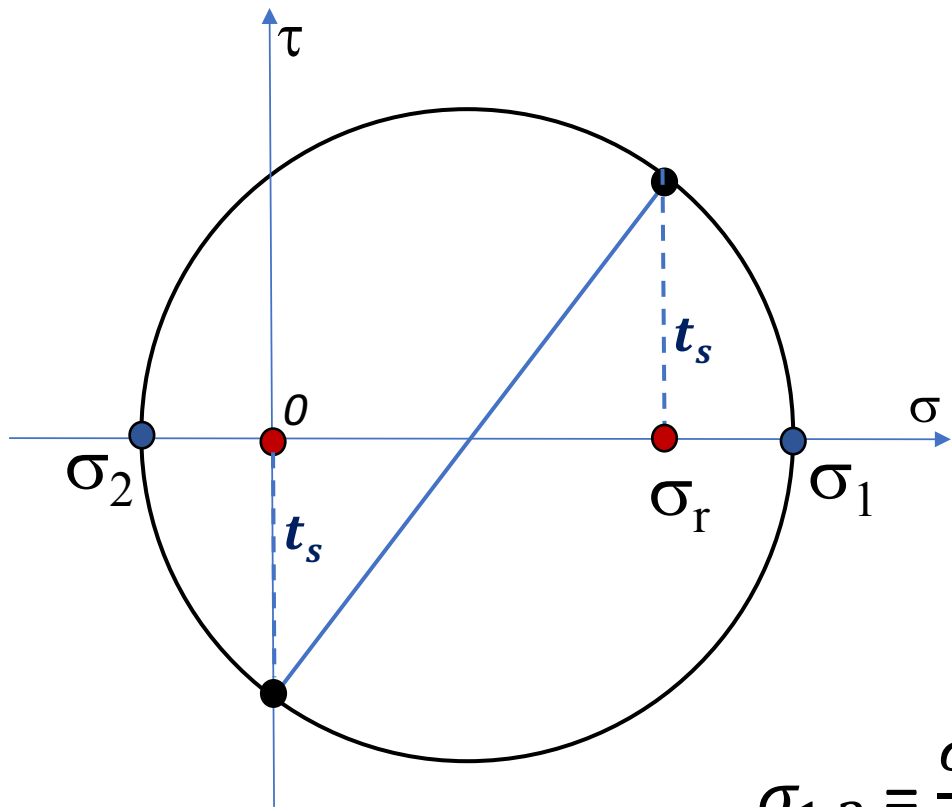
$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{zred}^T = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_1$$

$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2]}$$

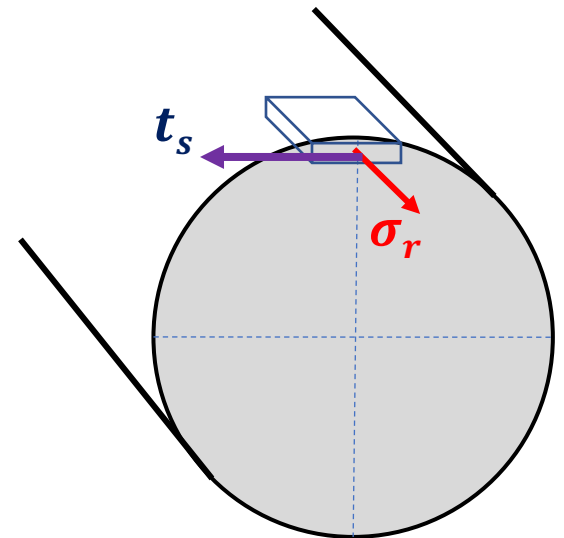
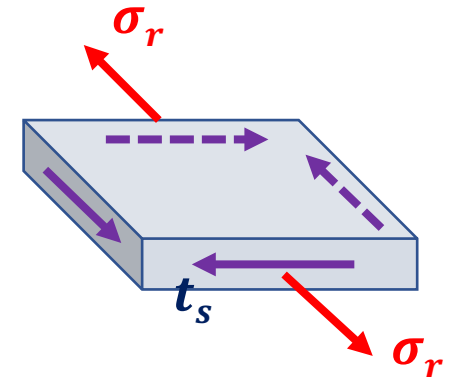


$$\sigma_r = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} \quad \tau_s = \frac{M}{\left(\frac{\pi D^3}{16}\right)}$$

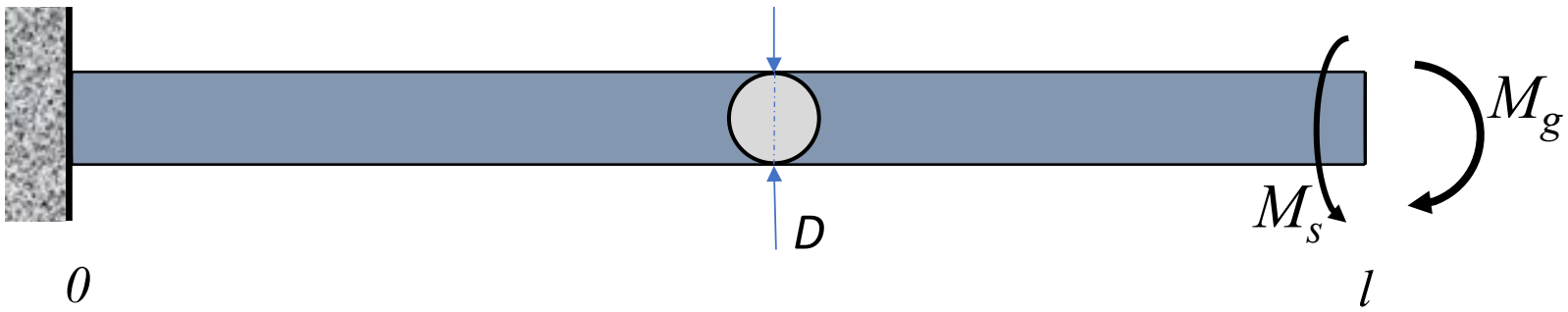


$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\sigma_r^2 + 3\tau_s^2}$$

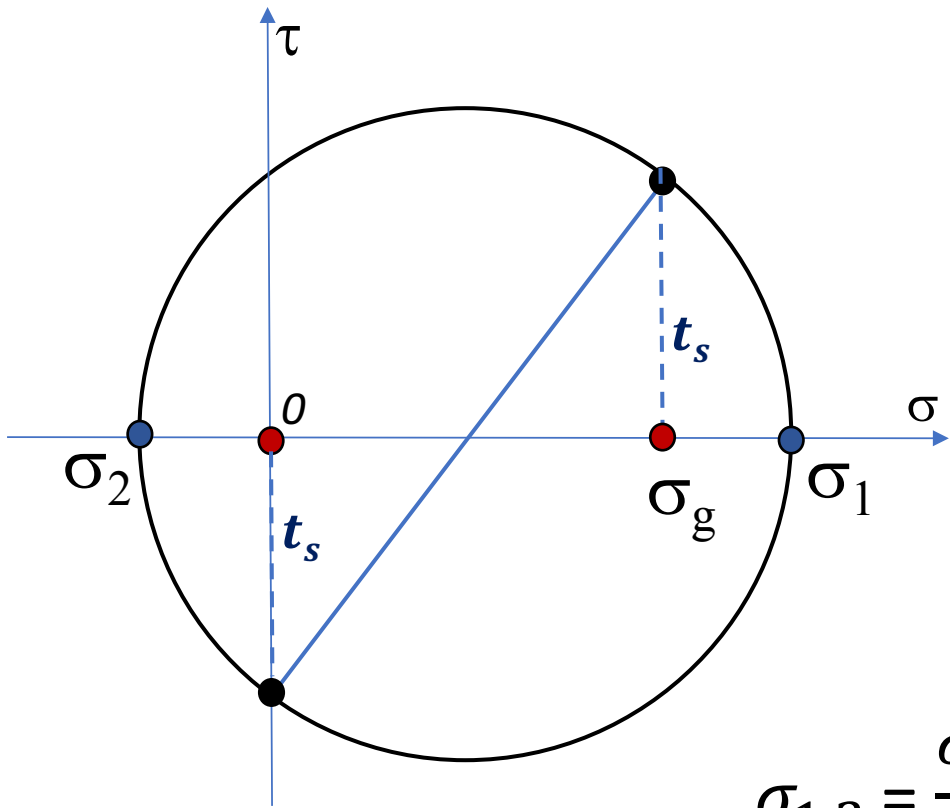
$$\sigma_{zred}^T = \sqrt{\sigma_r^2 + 4\tau_s^2}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_r + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - 0}{2}\right)^2 + \tau_s^2}$$



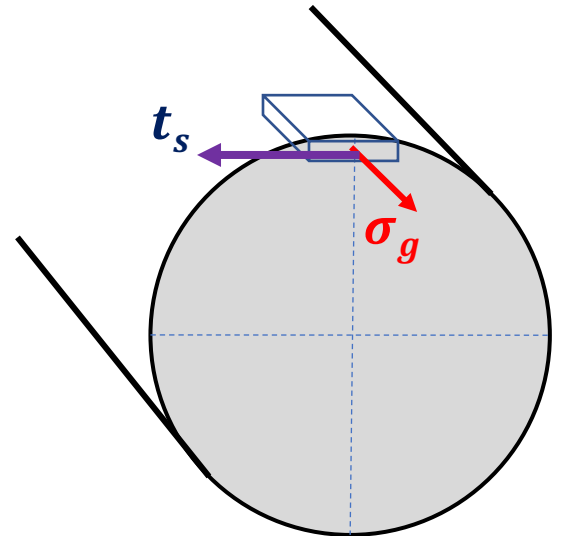
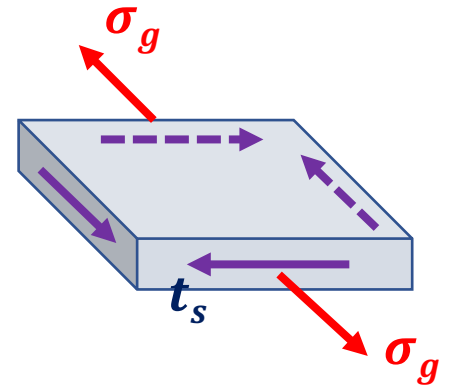
$$\sigma_g = \frac{M_g}{\left(\frac{\pi D^3}{32}\right)} \quad \tau_s = \frac{M_s}{\left(\frac{\pi D^3}{16}\right)}$$



$$\sigma_{zred}^H = \sqrt{\sigma_g^2 + 3\tau_s^2}$$

$$\sigma_{zred}^T = \sqrt{\sigma_g^2 + 4\tau_s^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_g + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_g - 0}{2}\right)^2 + \tau_s^2}$$



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

METODY ENERGETYCZNE



$$L = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{M_s^2 dx}{2GJ_0} + \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GA}$$

$$L = \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_s^2 l}{2GJ_0} + \frac{M_g^2 l}{2EJ} + \psi \frac{T^2 l}{2GA}$$



Twierdzenie Castigliano: $f = \frac{\partial L}{\partial P}$

Twierdzenie Menabrea: $0 = \frac{\partial L}{\partial R}$

f – współrzędna (przemieszczenie) uogólniona

P – siła uogólniona - czynna

R – reakcja

L – energia sprężysta układu

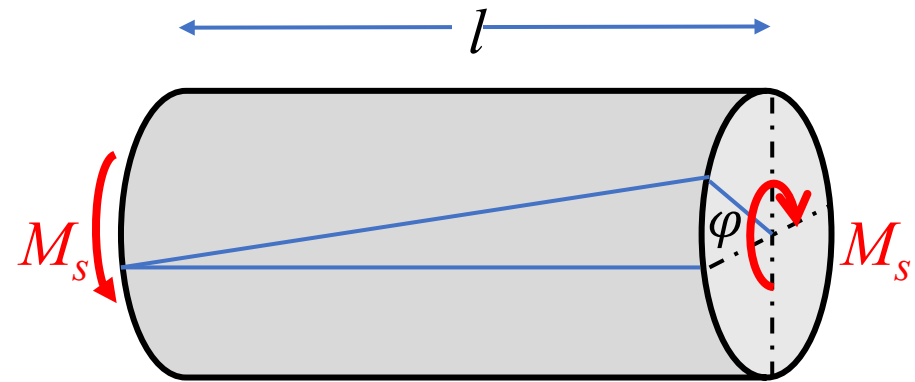
$$L = \frac{1}{2} \Delta l N$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$$L = \frac{N^2 l}{2EA}$$

$$L = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{M_s^2 dx}{2GJ_0} + \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GA}$$

$$L = \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_s^2 l}{2GJ_0} + \frac{M_g^2 l}{2EJ} + \psi \frac{T^2 l}{2GA}$$



Twierdzenie Castigliano: $f = \frac{\partial L}{\partial P}$

Twierdzenie Menabrea: $0 = \frac{\partial L}{\partial R}$

f – współrzędna (przemieszczenie) uogólniona

P – siła uogólniona - czynna

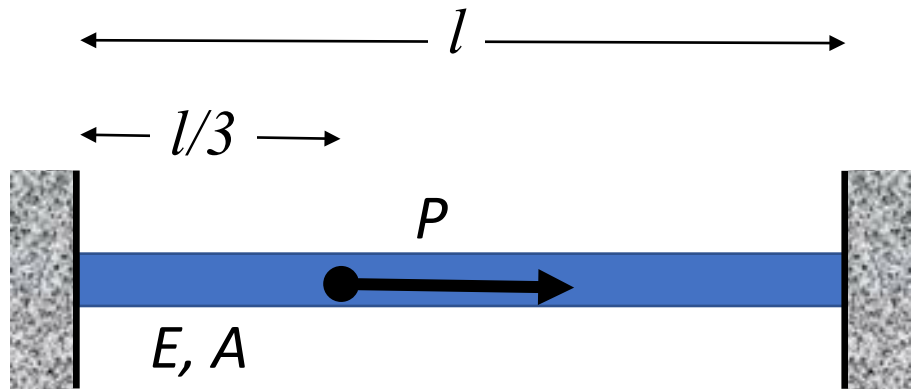
R – reakcja

L – energia sprężysta układu

$$L = \frac{1}{2} \varphi M_s$$

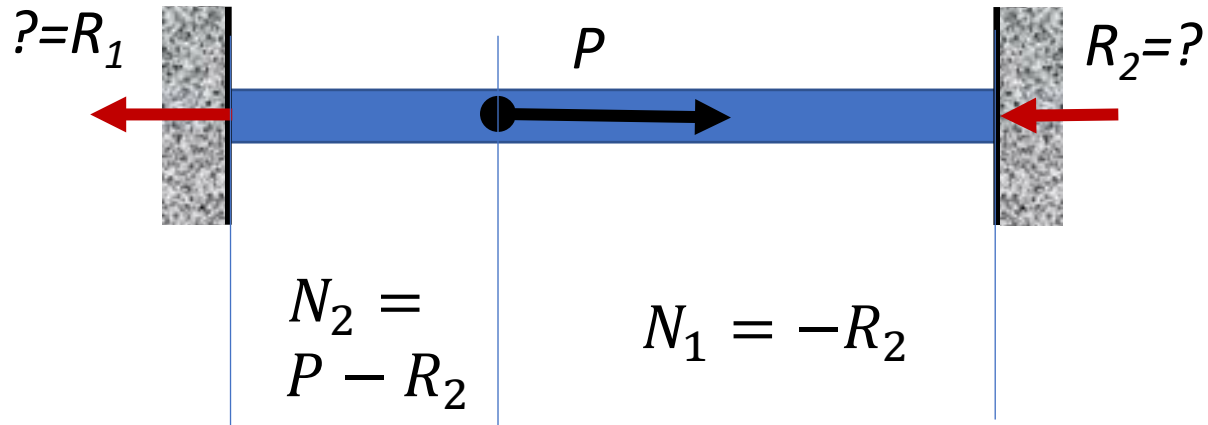
$$\varphi = \frac{M_s l}{GJ_0}$$

$$L = \frac{M_s^2 l}{2GJ_0}$$



równanie statyki

$$P = R_1 + R_2$$



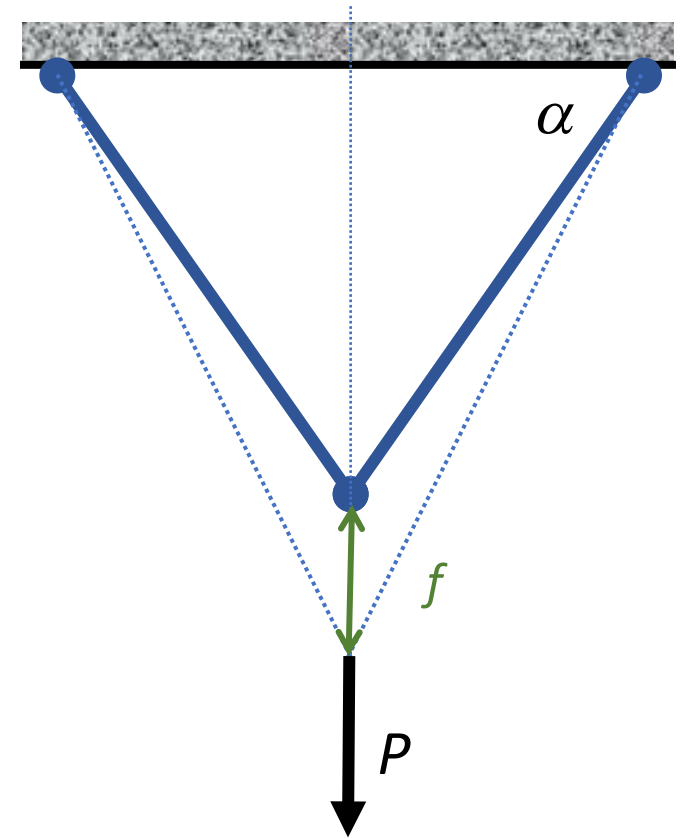
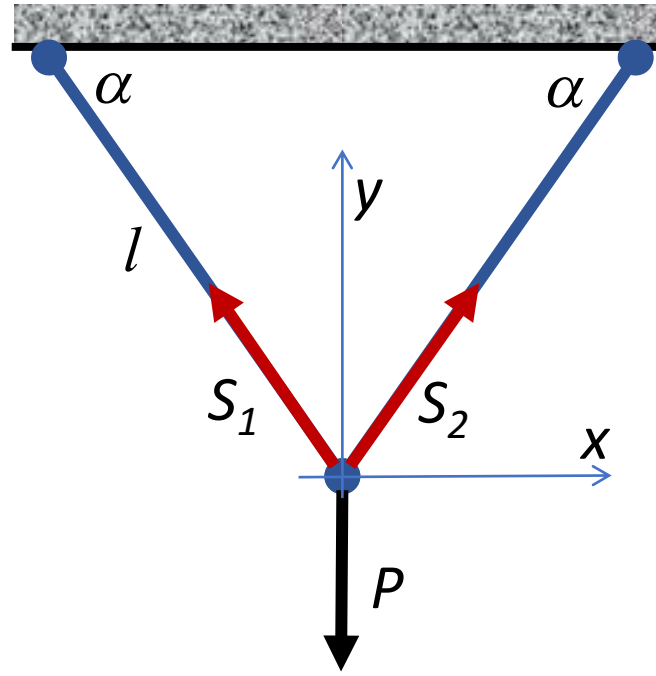
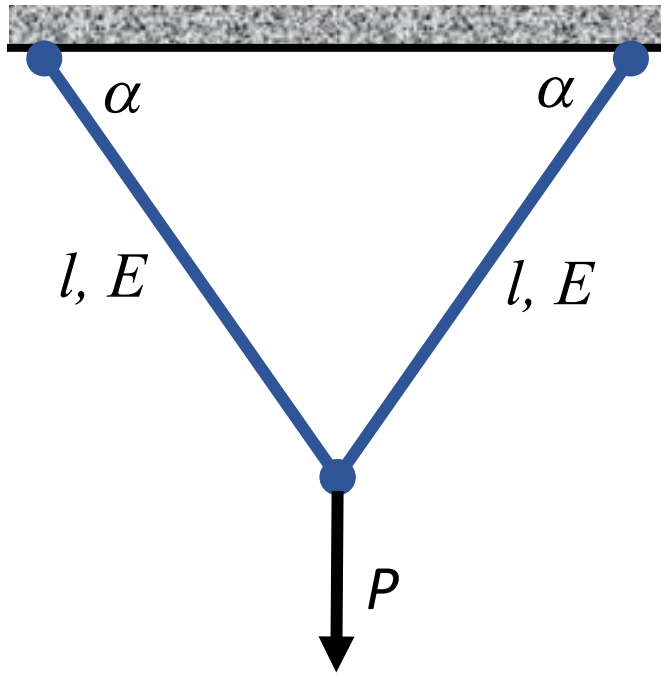
$$R_2 = \frac{1}{3}P$$

$$L = \frac{\frac{1}{3}l (P - R_2)^2}{2EA} + \frac{\frac{2}{3}l R_2^2}{2EA}$$



$$\frac{\partial L}{\partial R_2} = \frac{l}{EA} \left(-\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}R_2 + \frac{2}{3}R_2 \right) = 0$$





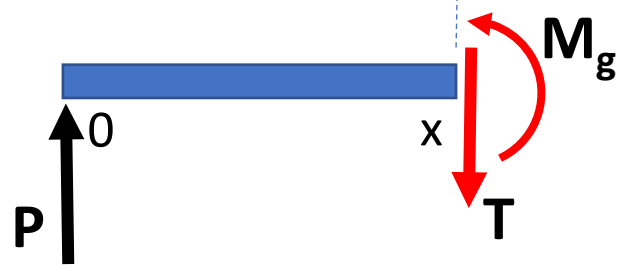
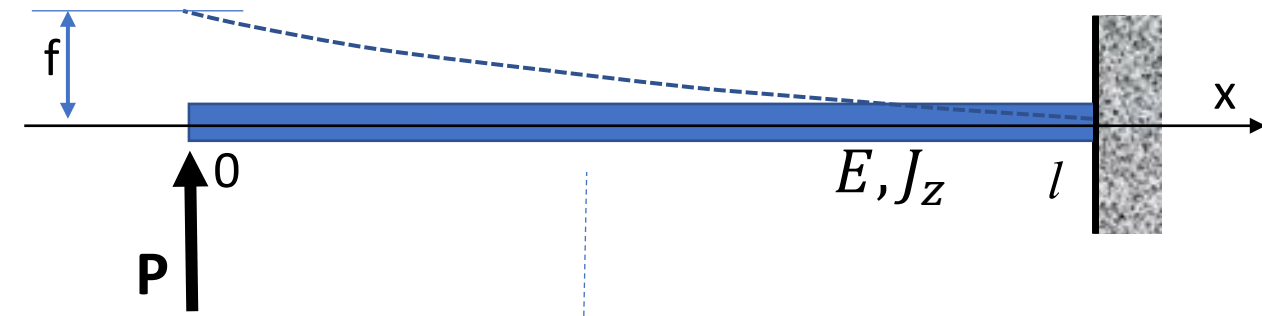
$$-S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha = 0$$

$$S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha - P = 0$$

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

$$L = 2 \frac{l \left(\frac{P}{2 \sin \alpha} \right)^2}{2EA}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{Pl}{2EA(\sin \alpha)^2} = f$$



$$M_g = P x$$

$$T = P$$

$$D = 0,2$$

$$l = 1$$

$$\psi = 1,185$$

$$\nu = 0,3$$

$$\frac{f_T}{f_M} = 0,0234$$

$$D = 0,06$$

$$l = 1$$

$$\psi = 1,185$$

$$\nu = 0,3$$

$$\frac{f_T}{f_M} = 0,0009$$

$$L = \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GA} = \int_0^l \frac{(Px)^2 dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{P^2 dx}{2GA}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = \int_0^l \frac{2x(Px) dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{2P dx}{2GA} = \frac{Pl^3}{3EJ} + \psi \frac{Pl}{GA} = f_M + f_T$$

$$L = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{M_s^2 dx}{2GJ_0} + \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EJ} + \cancel{\psi \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GA}}$$

$$L = \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_s^2 l}{2GJ_0} + \frac{M_g^2 l}{2EJ} + \cancel{\psi \frac{T^2 l}{2GA}}$$

Twierdzenie Castigliano: $f = \frac{\partial L}{\partial P}$

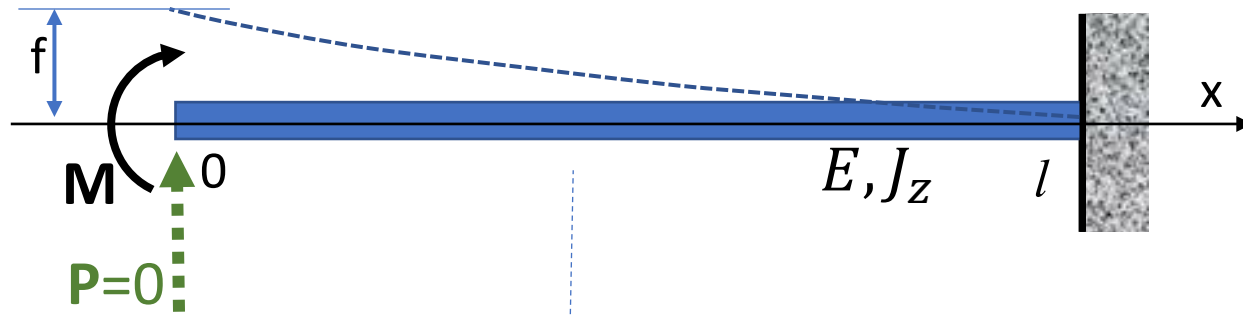
Twierdzenie Menabrea: $0 = \frac{\partial L}{\partial R}$

f – współrzędna (przemieszczenie) uogólniona

P – siła uogólniona - czynna

R – reakcja

L – energia sprężysta układu

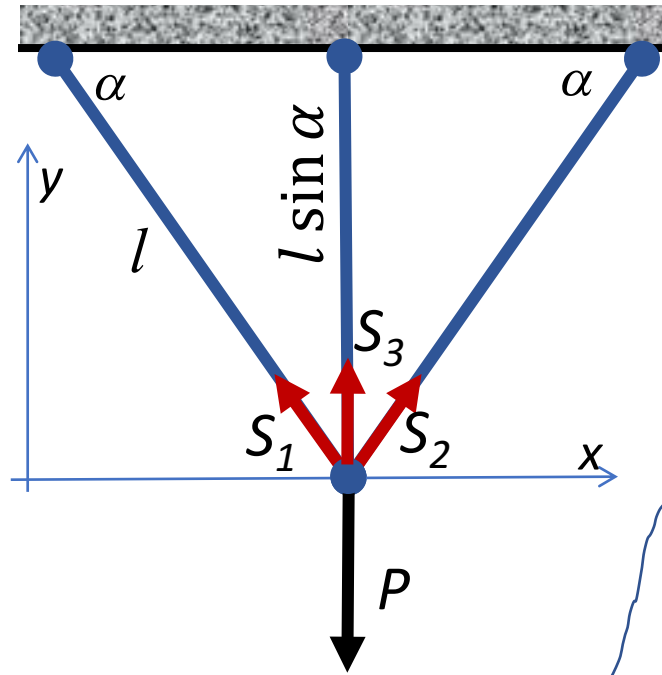
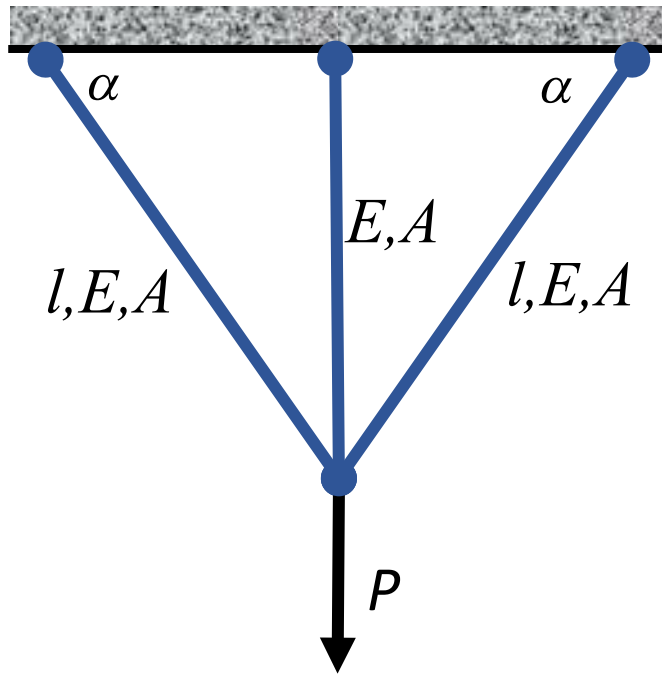


$$M_g = M + P x$$

$$T = P$$

$$L = \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GA} = \int_0^l \frac{(M + Px)^2 dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{P^2 dx}{2GA}$$

$$f = \left(\frac{\partial L}{\partial P} \right)_{P=0} = \left(\int_0^l \frac{2x(M + Px) dx}{2EJ} + \psi \int_0^l \frac{2P dx}{2GA} \right)_{P=0} = \frac{Ml^2}{2EJ}$$



$$L = 2 \frac{S^2 l}{2EA} + \frac{S_3^2 l \sin \alpha}{2EA}$$

$$S = \frac{P - S_3}{2 \sin \alpha}$$

$$L = 2 \frac{\left(\frac{P - S_3}{2 \sin \alpha}\right)^2 l}{2EA} + \frac{S_3^2 l \sin \alpha}{2EA}$$

$$-S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha = 0$$

$$S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha + S_3 - P = 0$$

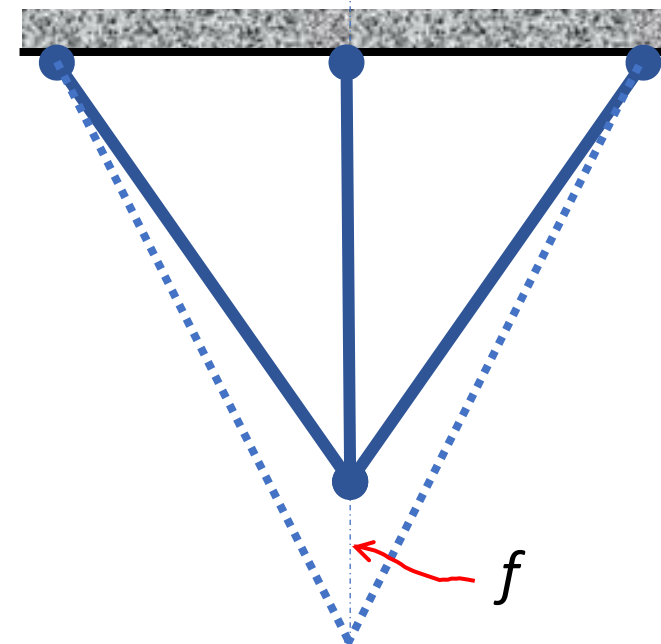
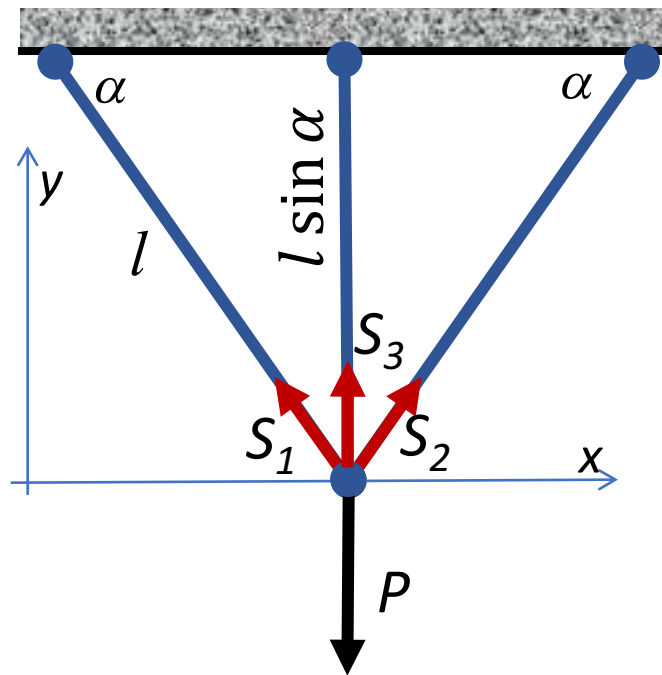
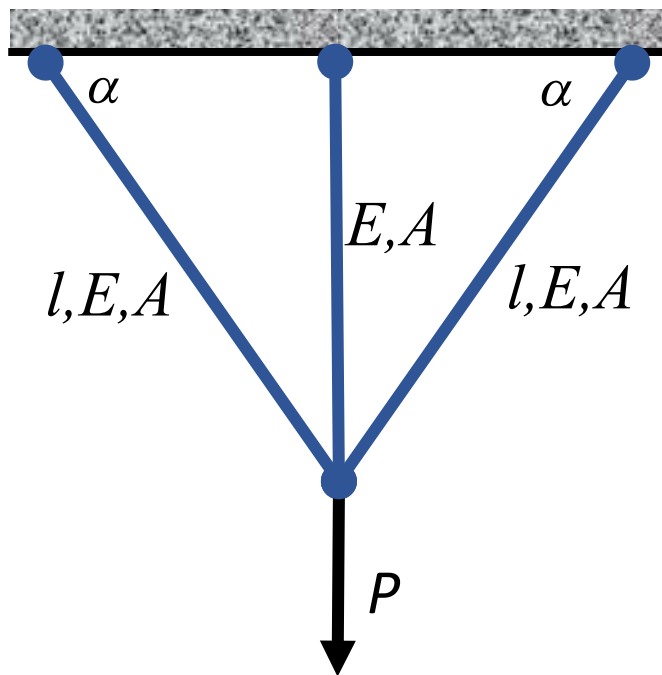
$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = \frac{-2(P - S_3)l}{4EA(\sin \alpha)^2} + \frac{2S_3 l \sin \alpha}{2EA} = 0$$

$$S_1 = S_2 = S$$

$$2S \sin \alpha + S_3 - P = 0$$

$$S_1 = S_2 = S = \frac{P(\sin \alpha)^2}{1 + 2(\sin \alpha)^3}$$

$$S_3 = \frac{P}{1 + 2(\sin \alpha)^3}$$



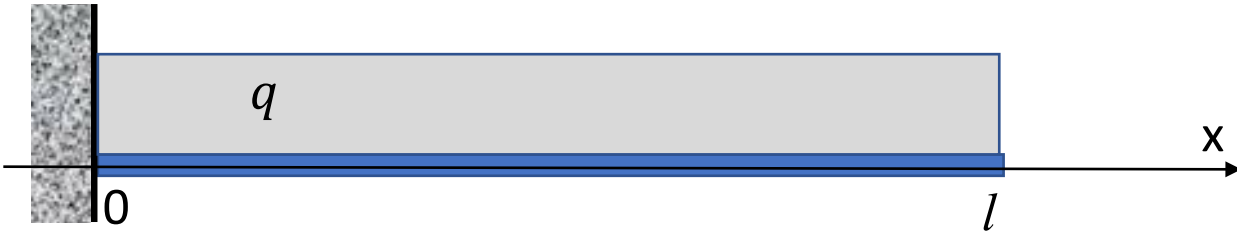
$$L = 2 \frac{S^2 l}{2EA} + \frac{S_3^2 l \sin \alpha}{2EA}$$

$$S_1 = S_2 = S = \frac{P(\sin \alpha)^2}{1 + 2(\sin \alpha)^3}$$

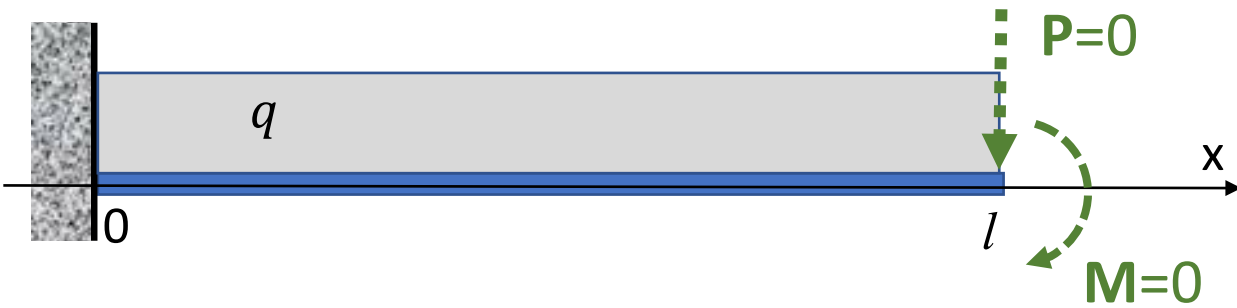
$$S_3 = \frac{P}{1 + 2(\sin \alpha)^3}$$

$$L = 2 \frac{\left(\frac{P(\sin \alpha)^2}{1 + 2(\sin \alpha)^3} \right)^2 l}{2EA} + \frac{\left(\frac{P}{1 + 2(\sin \alpha)^3} \right)^2 l \sin \alpha}{2EA}$$

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{Pl \sin \alpha}{EA[1 + 2(\sin \alpha)^3]}$$



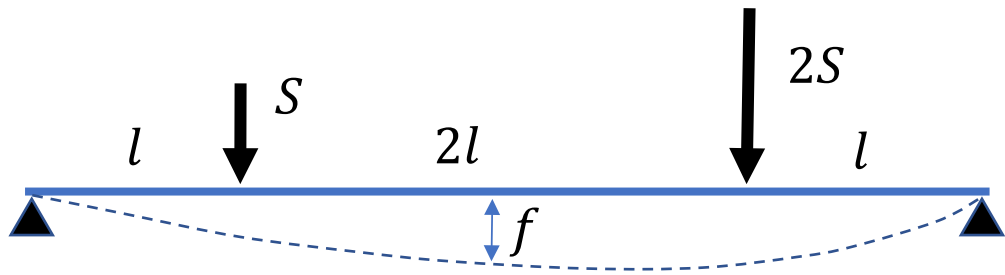
$$L = \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EJ}$$



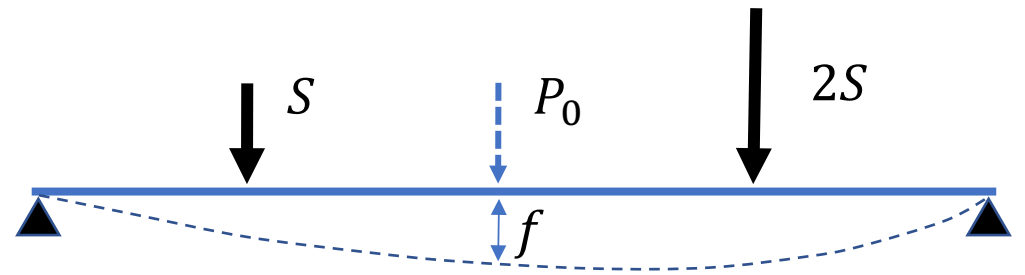
$$f = \left(\frac{\partial L}{\partial P} \right)_{P=0, M=0} = \frac{ql^4}{8EJ}$$

$$\varphi = \left(\frac{\partial L}{\partial M} \right)_{P=0, M=0} = \frac{ql^3}{6EJ}$$

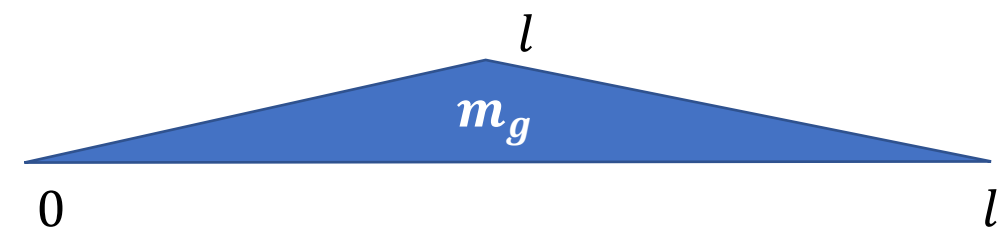
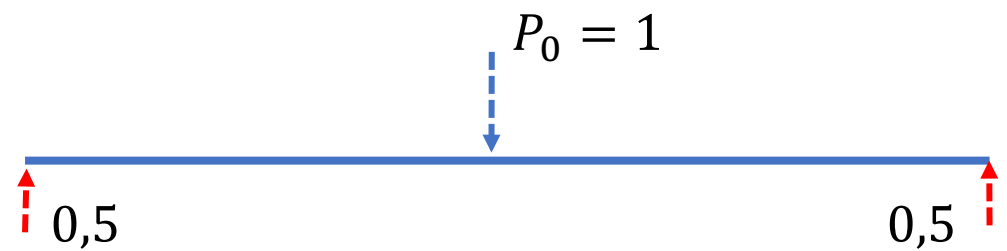
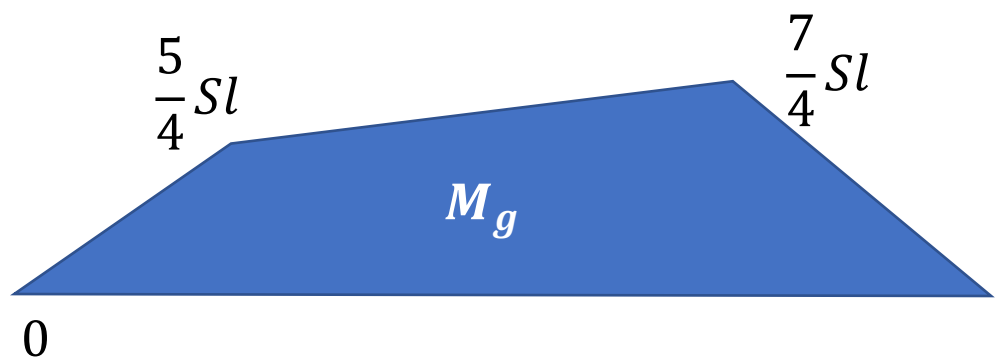
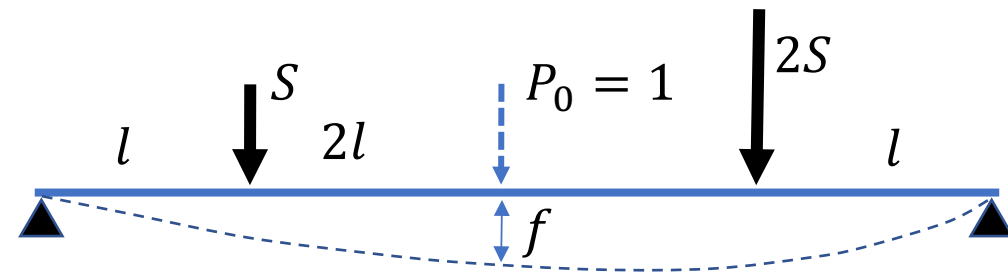
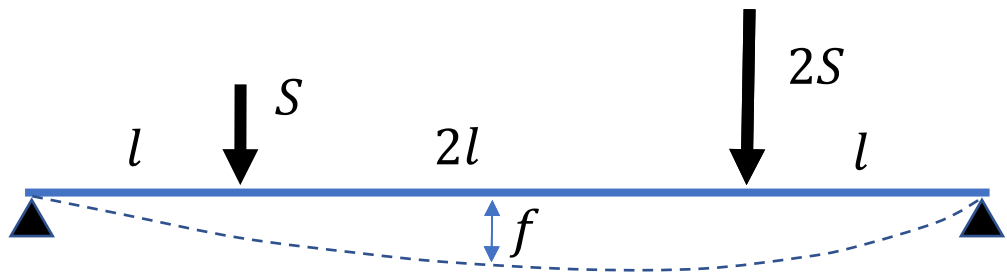
$$M_g = -0,5q(l-x)^2 - P(l-x) - M$$



$$L = \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EJ}$$



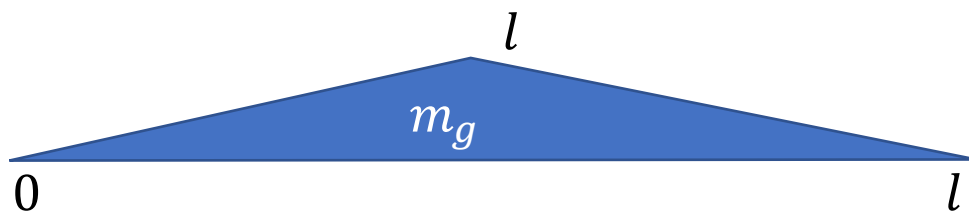
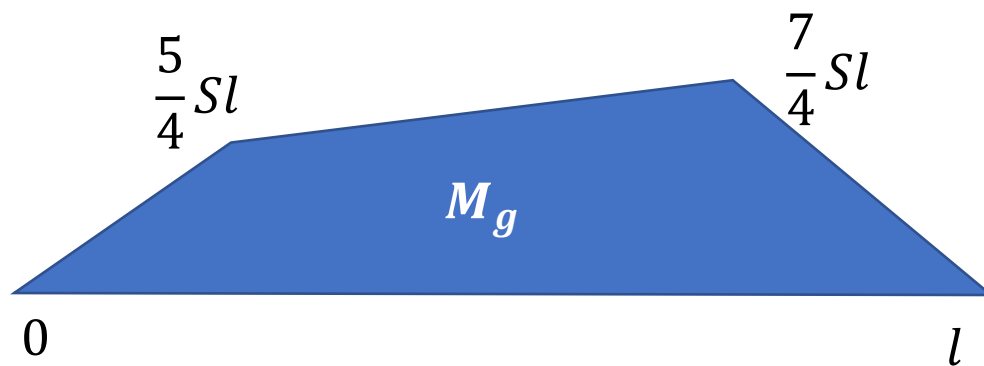
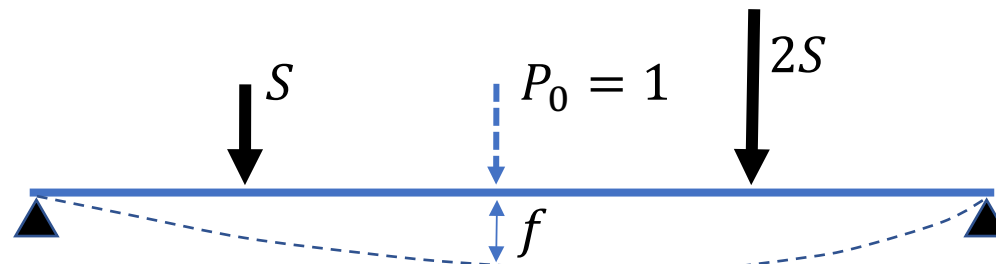
$$f = \left(\frac{\partial L}{\partial P_0} \right)_{P_0=0}$$

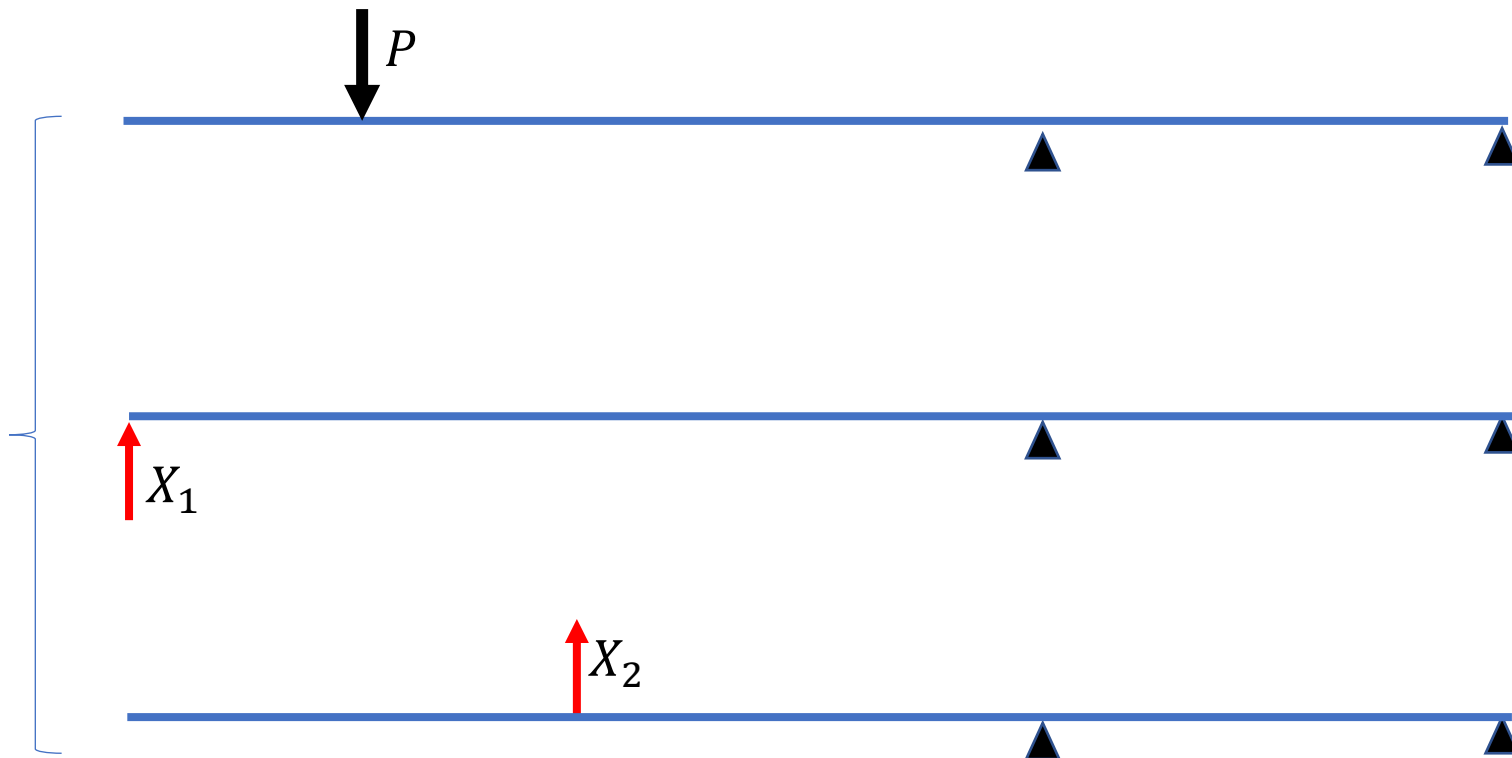


$$L = \int_0^l \frac{(M_g + m_g P_0)^2 dx}{2EJ}$$

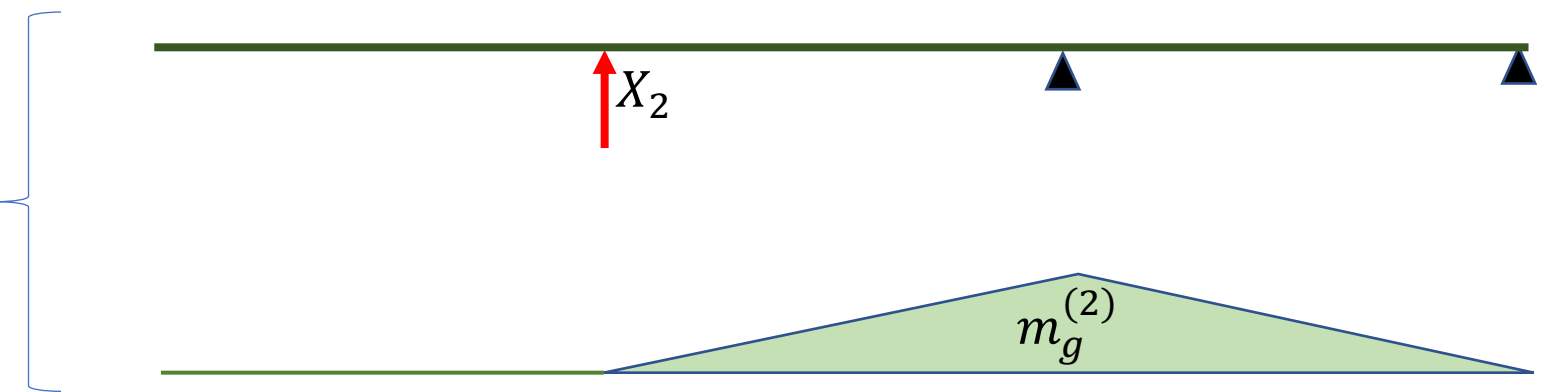
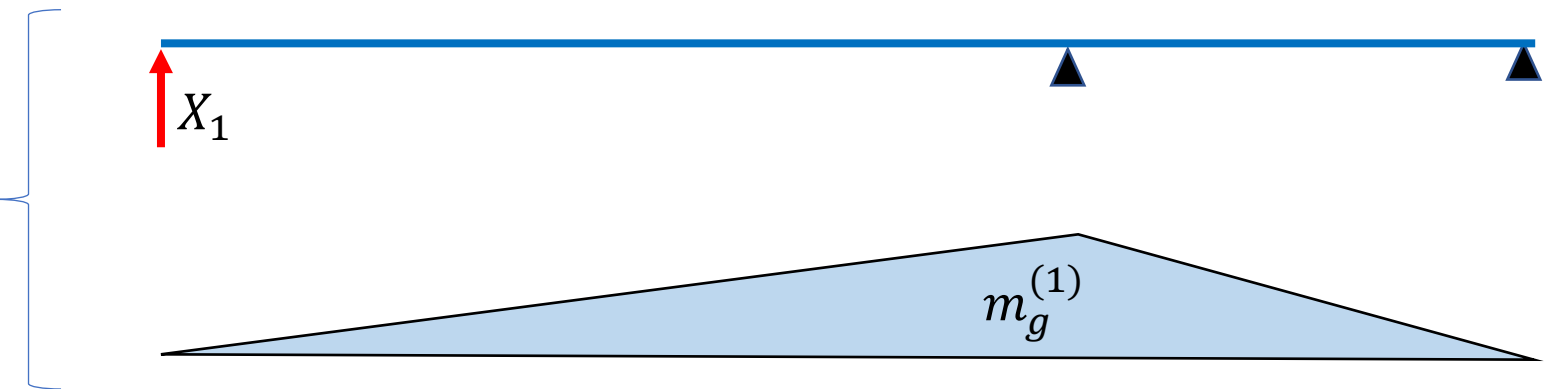
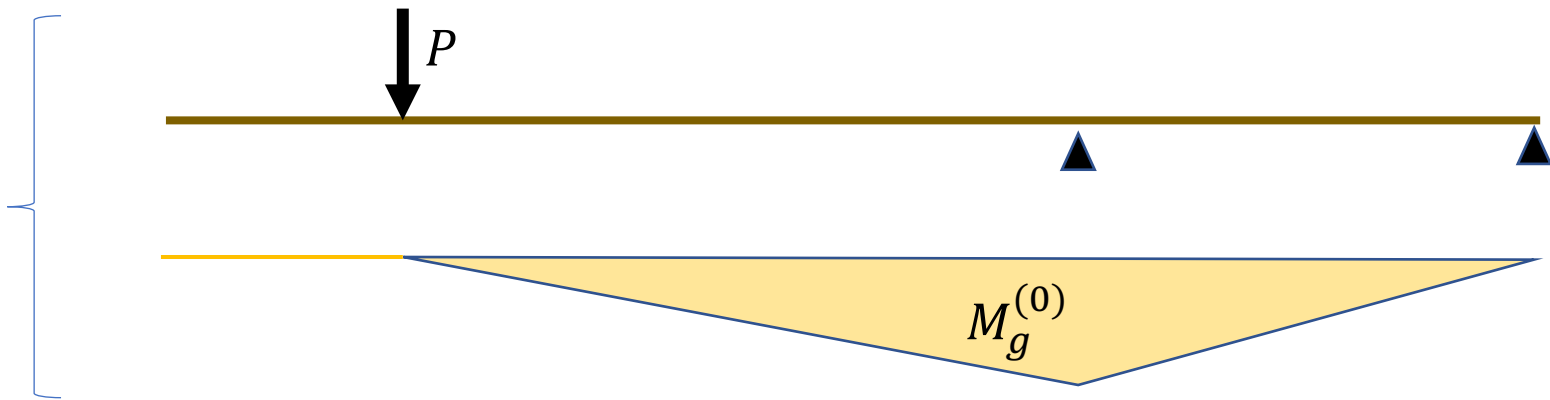
$$f = \left(\frac{\partial L}{\partial P_0} \right)_{P_0=0} = \left(\int_0^l \frac{2(M_g + m_g P_0) m_g dx}{2EJ} \right)_{P_0=0}$$

$$= \int_0^l \frac{M_g m_g}{EJ}$$





$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1 + m_g^{(2)} X_2$$






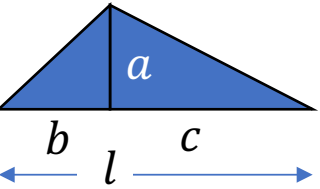



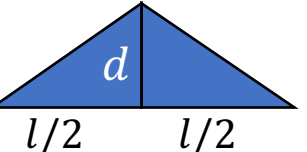


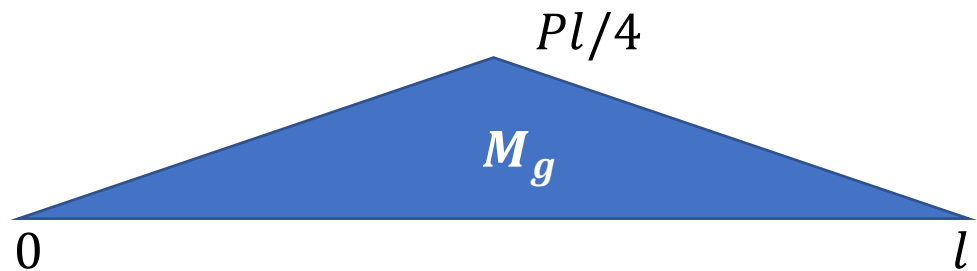
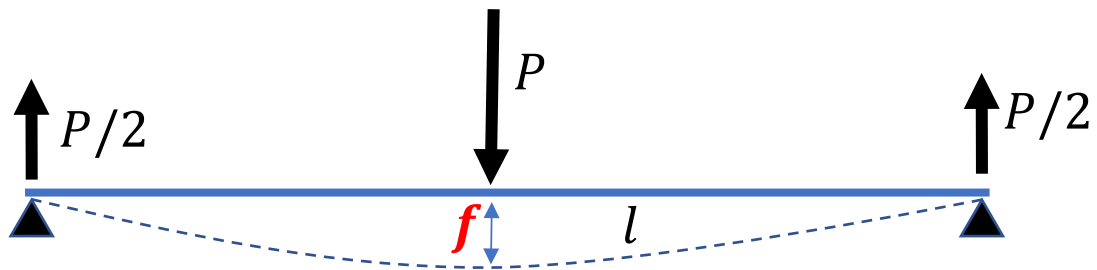
$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1 + m_g^{(2)} X_2$$

$$L = \int_0^l \frac{(M_g)^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{(M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1 + m_g^{(2)} X_2)^2}{2EJ} dx$$

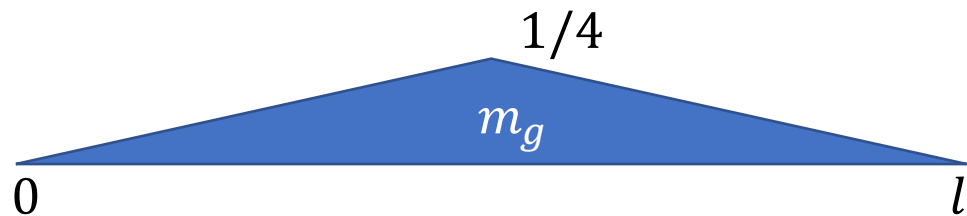
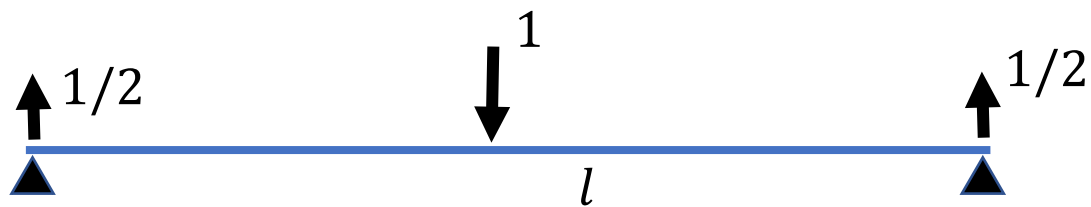
$$0 = \frac{\partial L}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{M_g m_g^{(1)}}{EJ} dx = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)}}{EJ} dx + X_1 \int_0^l \frac{m_g^{(1)} m_g^{(1)}}{EJ} dx + X_2 \int_0^l \frac{m_g^{(2)} m_g^{(1)}}{EJ} dx = 0$$

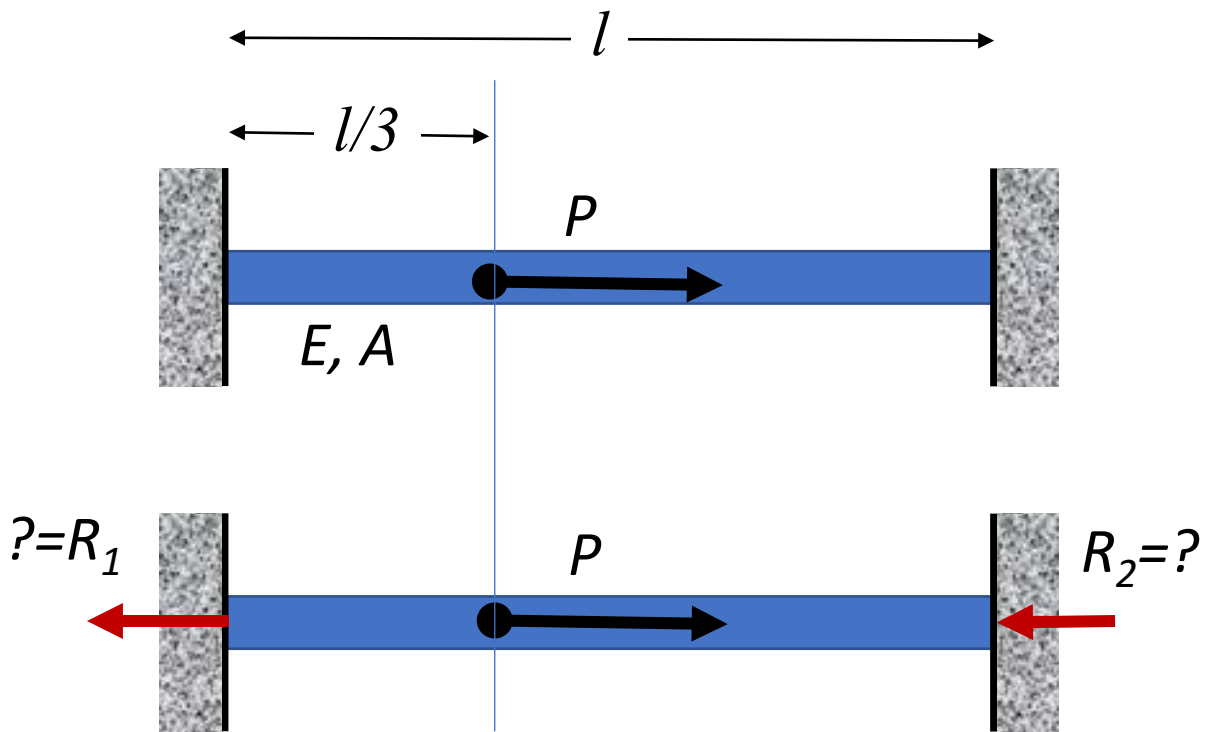
$$0 = \frac{\partial L}{\partial X_2} = \int_0^l \frac{M_g m_g^{(2)}}{EJ} dx = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(2)}}{EJ} dx + X_1 \int_0^l \frac{m_g^{(1)} m_g^{(2)}}{EJ} dx + X_2 \int_0^l \frac{m_g^{(2)} m_g^{(2)}}{EJ} dx = 0$$

					
d	adl	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{2}(a+b)dl$	$\frac{1}{2}adl$
	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{3}adl$	$\frac{1}{6}adl$	$\frac{1}{6}(2a+b)dl$	$\frac{1}{6}ad(l+c)$
	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{6}adl$	$\frac{1}{3}adl$	$\frac{1}{6}(a+2b)dl$	$\frac{1}{6}ad(l+b)$
	$\frac{1}{2}a(d+e)l$	$\frac{1}{6}a(2d+e)l$	$\frac{1}{6}a(d+2e)l$	$\frac{1}{6}l[a(2d+e)+b(d+2e)]$	$\frac{1}{6}a[d(l+c)+e(l+b)]$
	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{4}adl$	$\frac{1}{4}adl$	$\frac{1}{6}(a+b)dl$	$\frac{adl}{2c} \left(\frac{l}{2} - \frac{2b^2}{3l} \right)$



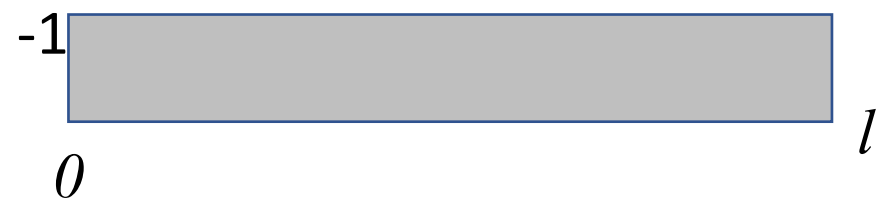
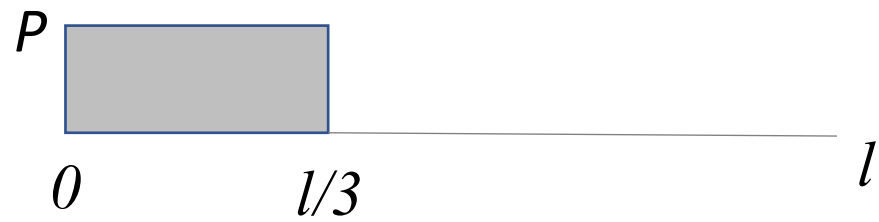
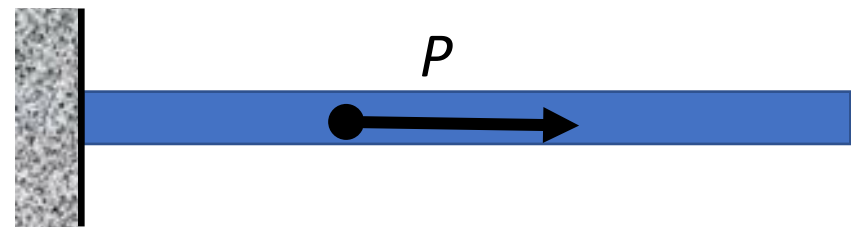
$$f = \int_0^l \frac{M_g m_g}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{\frac{Pl}{4}}{2} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{2 \left(\frac{l}{2} \right)^2}{3l} \right) = \frac{Pl^3}{48EJ}$$





$$\frac{l}{3}P(-1) + \frac{2l}{3}0(-1) + l(-1)(-1)R_2 = 0$$

$$R_2 = \frac{P}{3}$$



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

STATYCZNOŚĆ PRĘTÓW ŚCISKANYCH (WYBOCZENIE)

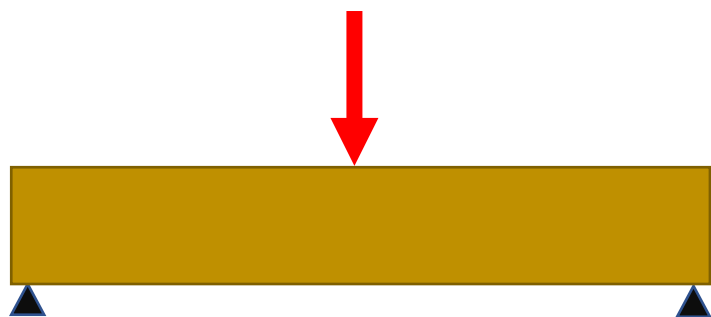


KRYTERIA OCENY KONSTRUKCJI

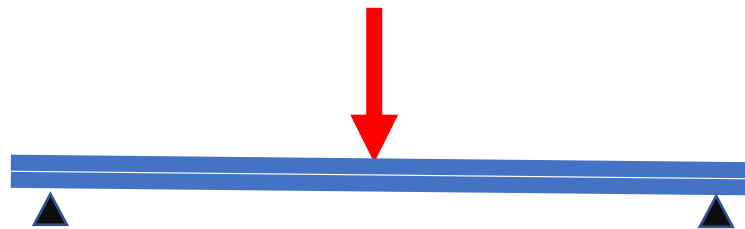
- wytrzymałość (naprężenia)
- sztywność (odkształcenia)
- stateczność
- koszty



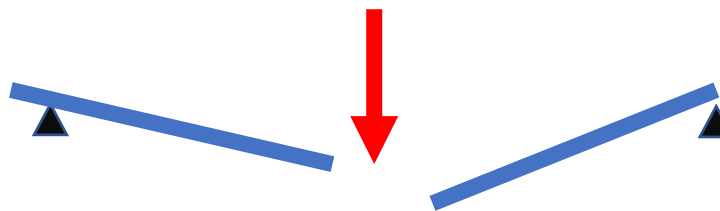
stateczność



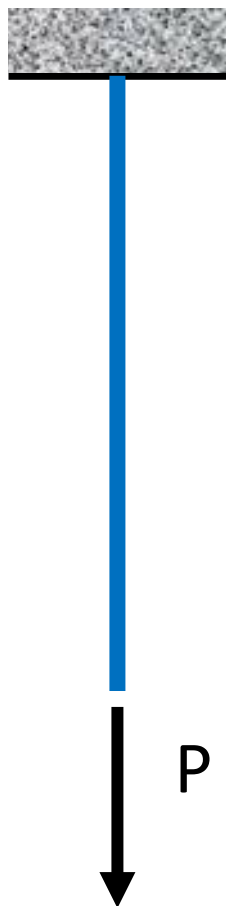
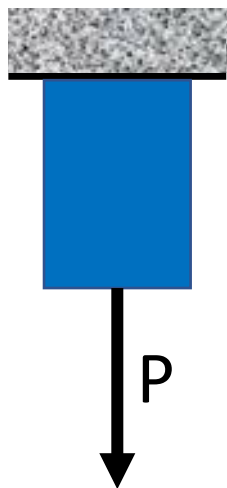
koszty



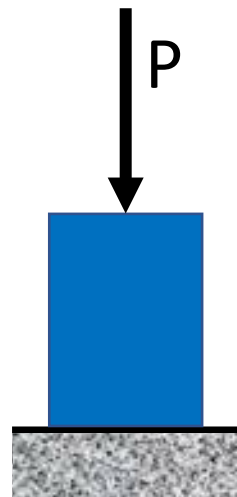
wytrzymałość (naprężenia)



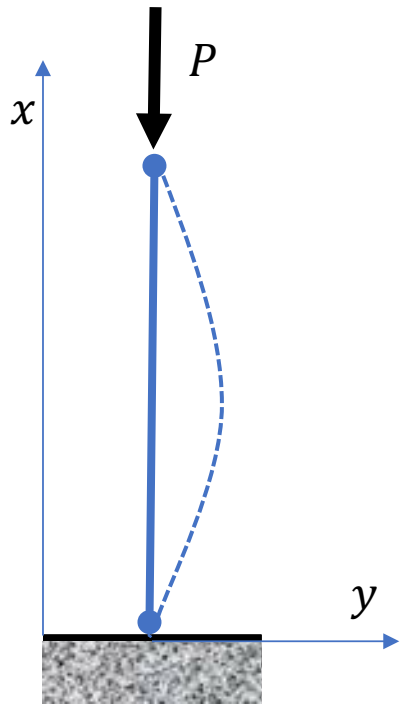
sztywność (odkształcenia)



$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{dop}$$



$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{dop}$$



$$EJy'' = -Py$$

$$y'' + \frac{P}{EJ}y = 0$$

$$y'' + k^2 y = 0 \quad k^2 = \frac{P}{EJ}$$



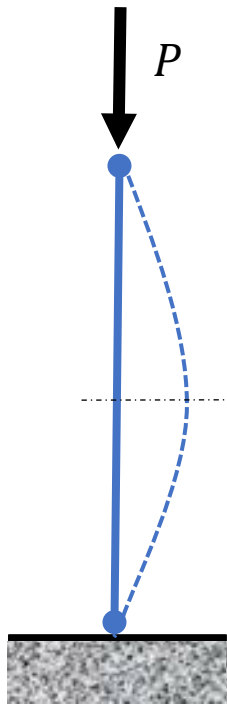
$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$P_{kryt} = P_{min} \quad (n = 1)$$



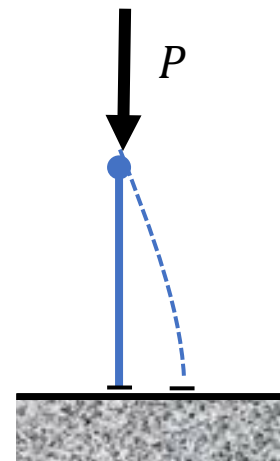
$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x = l \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A \sin kl = 0 \Rightarrow \sin kl = 0 \quad (A \neq 0) \Rightarrow kl = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{l}$$

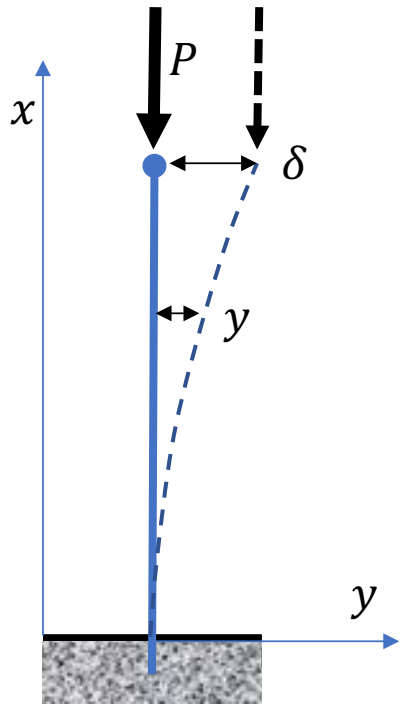


$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$l \rightarrow 2l$$



$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{4l^2}$$



$$EJy'' = P(\delta - y)$$

$$y'' + \frac{P}{EJ}y = \frac{P}{EJ}\delta$$

$$y'' + k^2 y = k^2 \delta \quad k^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \delta$$

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = -\delta$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (k \neq 0)$$

$$x = l \Rightarrow y = \delta$$

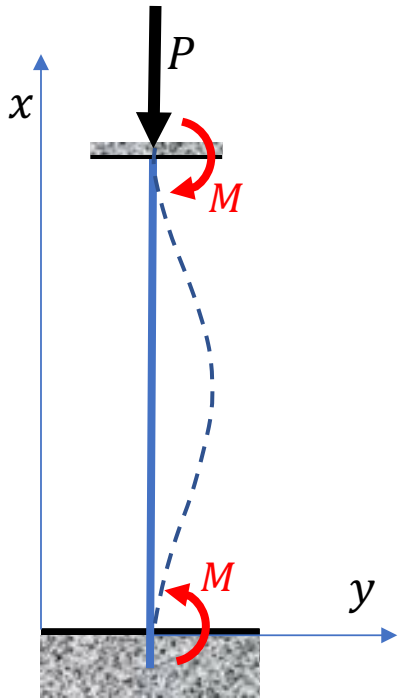
$$\cos kl = 0$$

$$\Rightarrow kl = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi}{2l}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{4l^2}$$

$$P_{kryt} = P_{min}$$



$$EJy'' = -Py + M$$

$$y'' + \frac{P}{EJ}y = \frac{M}{EJ}$$

$$y'' + k^2 y = m$$

$$m = \frac{M}{EJ}$$

$$k^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{0,25l^2}$$

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{m}{k^2}$$

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx$$

$$P_{kryt} = P_{min}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow B = -\frac{m}{k^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y' = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad (k \neq 0)$$

$$x = l \Rightarrow y = 0$$

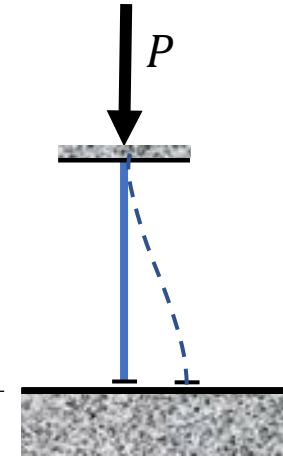
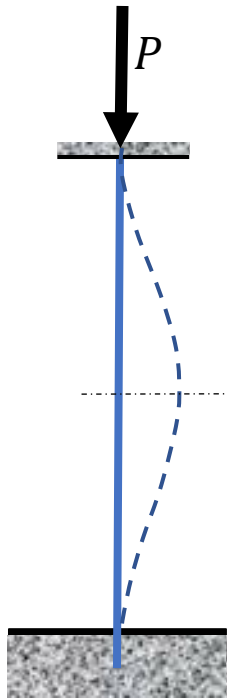
$$x = l \Rightarrow y' = 0$$

$$\cos kl = 0$$

$$\sin kl = 0$$

$$\Rightarrow kl = 2\pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{l}$$

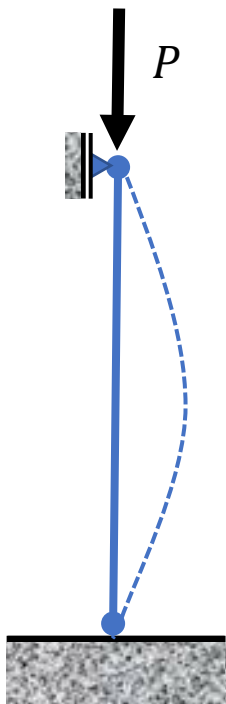


$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{0,25l^2}$$

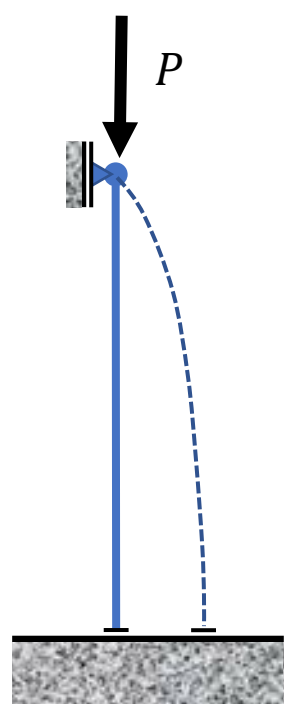
$$l \rightarrow 2l$$



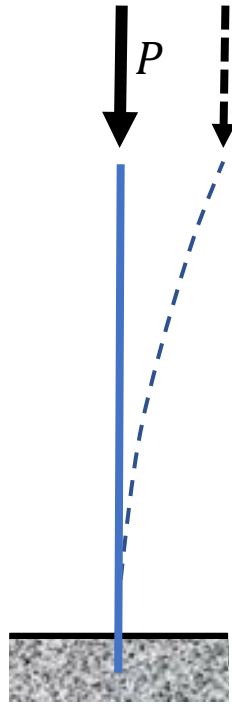
$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l^2}$$



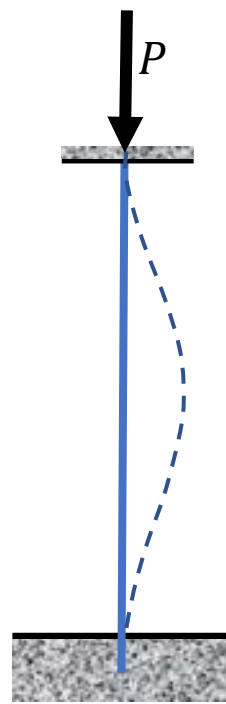
$$l_w = 1l$$



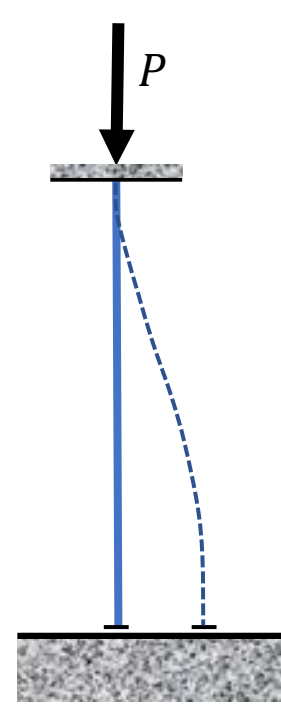
$$l_w = 2l$$



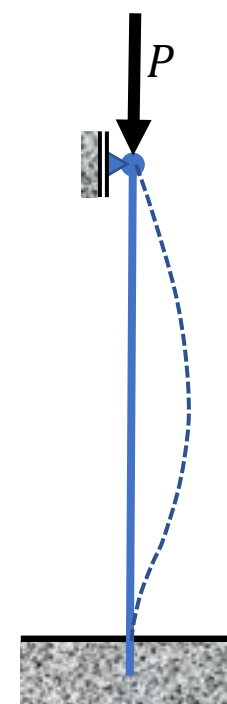
$$l_w = 2l$$



$$l_w = 0,5l$$



$$l_w = 1l$$



$$l_w = 0,7l$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{4l^2}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{4l^2}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{0,25l^2}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{0,5l^2}$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l_w^2}$$

$$J = J_{min}$$

$$l_w = \alpha l$$

$$P_{kryt} = EJ_{min} \frac{\pi^2}{l_w^2}$$

$$J_{min} = r^2 A \quad r = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

$$\lambda = \frac{l_w}{r}$$

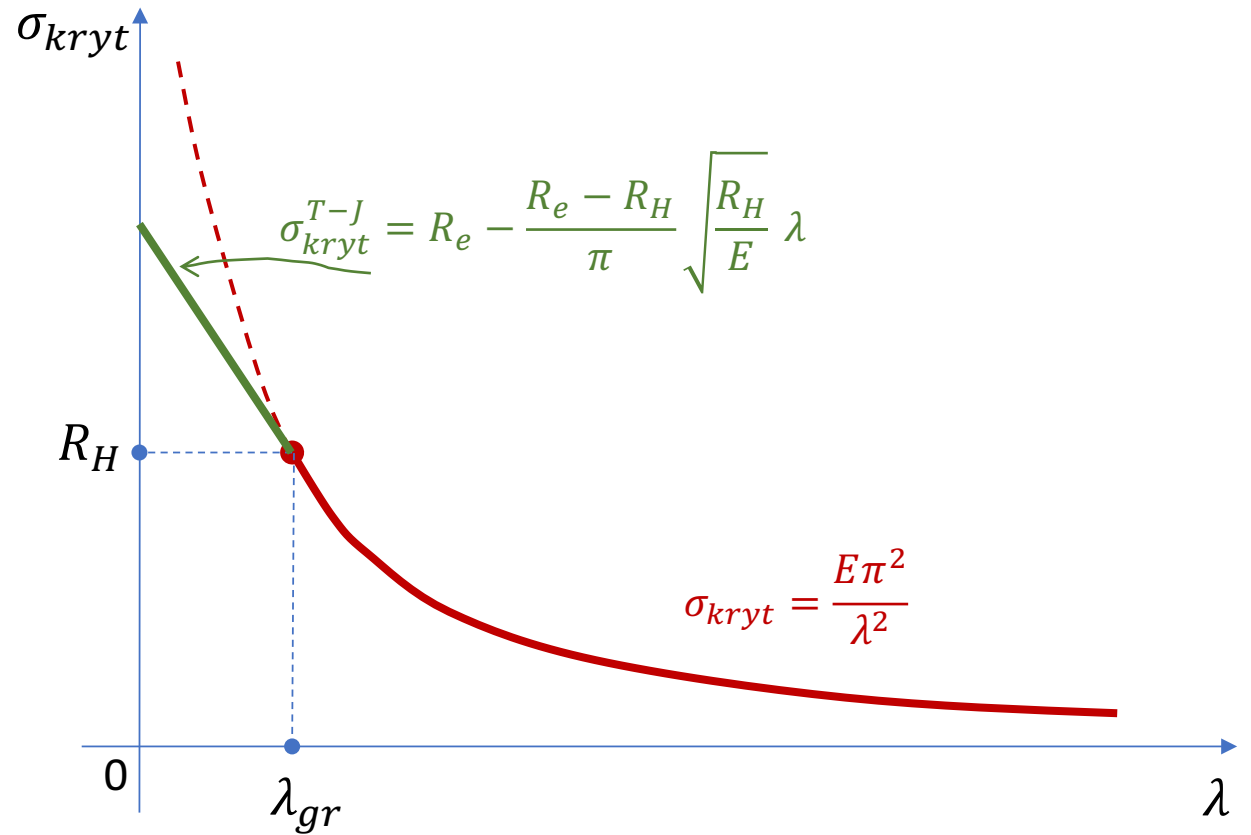
$$\sigma_{kryt} = \frac{P_{kryt}}{A}$$

$$\sigma_{kryt} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{kryt} = R_H$$

$$\lambda = \lambda_{gr}$$

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}$$



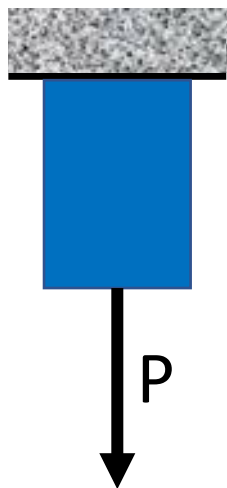
$$\lambda < \lambda_{gr}$$

$$\lambda > \lambda_{gr}$$

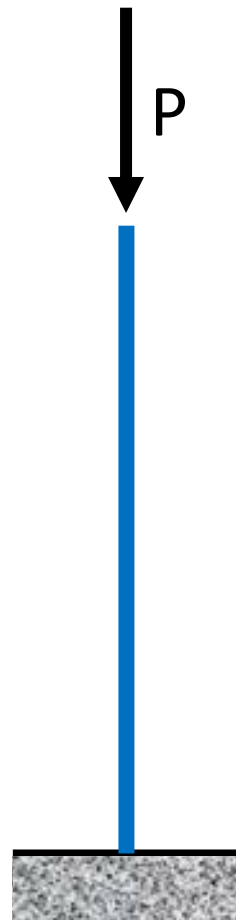
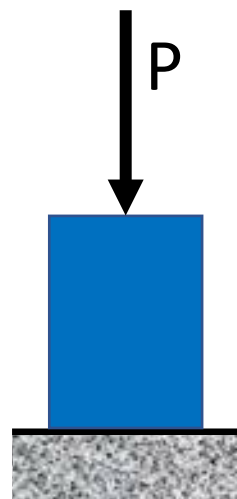
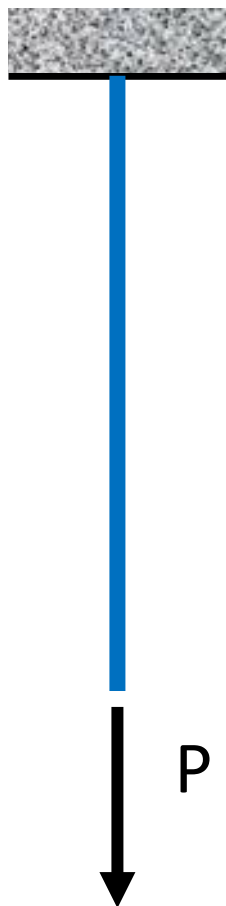
$$P_{kryt} = A\sigma_{kryt}^{T-J}$$

$$P_{kryt} = EJ_{min} \frac{\pi^2}{l_w^2}$$

$$\sigma_{kryt}^{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}} \lambda$$



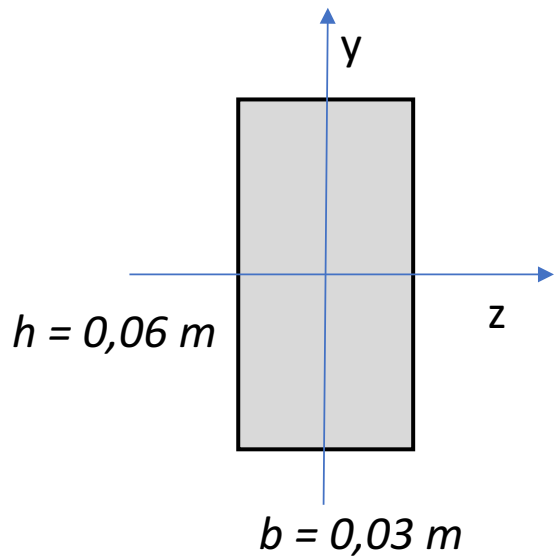
$$P < A \sigma_{dop}$$



$$P < A \sigma_{dop}$$

i

$$P < P_{kryt}$$



$$l = 1 \text{ m}$$

$$R_H = 200 \text{ MPa}$$

$$R_e = 215 \text{ MPa}$$

$$R_c = 195 \text{ MPa}$$

$$E = 205000 \text{ MPa}$$

$$P_{kryt} = ?$$

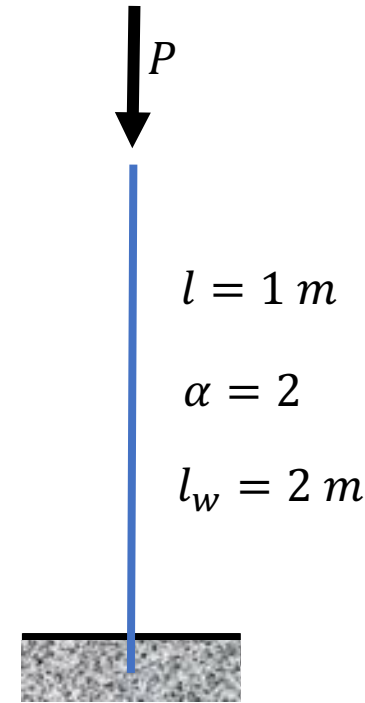
$$J_z = \frac{bh^3}{12} = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_y = J_{min} = \frac{hb^3}{12} = 1,35 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$A = hb = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

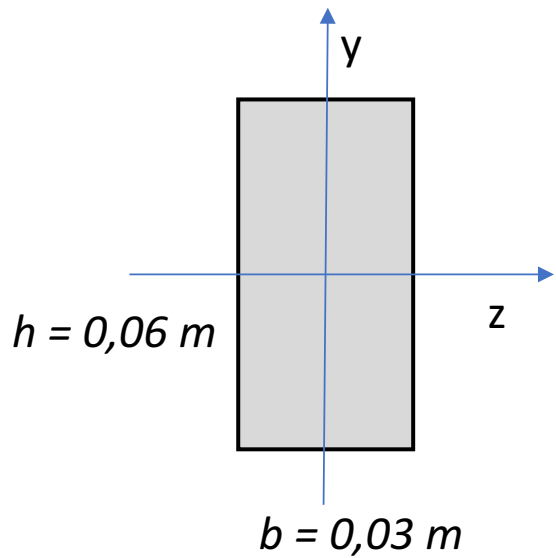
$$r = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = 8,66 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 100,6$$



$$\lambda = \frac{l_w}{r} = 231 > \lambda_{gr} = 100,6$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l_w^2} = 68,3 \text{ kN} < AR_c = 351 \text{ kN}$$



$$l = 1 \text{ m}$$

$$R_H = 200 \text{ MPa}$$

$$R_e = 215 \text{ MPa}$$

$$R_c = 195 \text{ MPa}$$

$$E = 205000 \text{ MPa}$$

$$P_{kryt} = ?$$

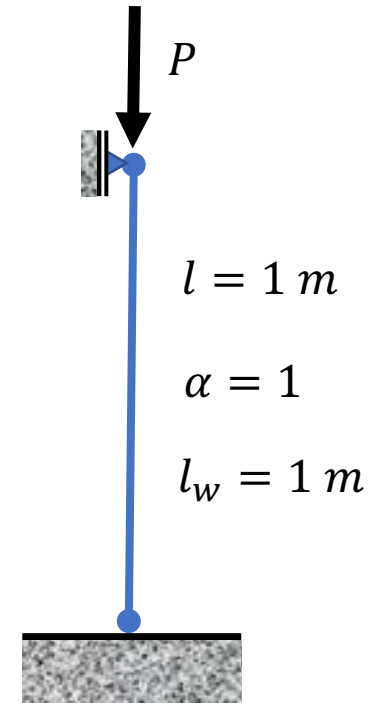
$$J_z = \frac{bh^3}{12} = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_y = J_{min} = \frac{hb^3}{12} = 1,35 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$A = hb = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

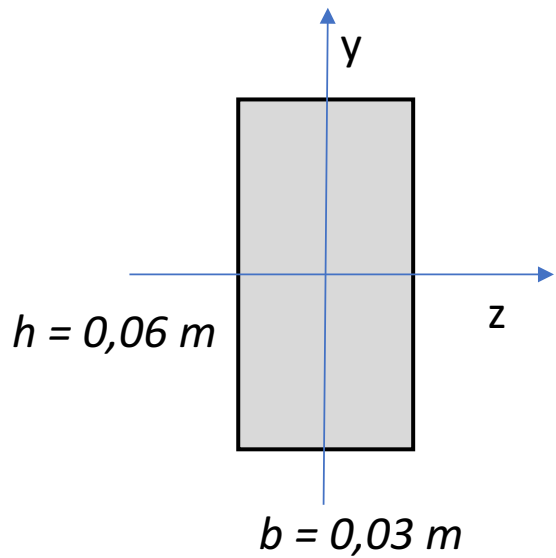
$$r = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = 8,66 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 100,6$$



$$\lambda = \frac{l_w}{r} = 115,5 > \lambda_{gr} = 100,6$$

$$P_{kryt} = EJ \frac{\pi^2}{l_w^2} = 273 \text{ kN} < AR_c = 351 \text{ kN}$$



$$l = 1 \text{ m}$$

$$R_H = 200 \text{ MPa}$$

$$R_e = 215 \text{ MPa}$$

$$R_c = 195 \text{ MPa}$$

$$E = 205000 \text{ MPa}$$

$$P_{kryt} = ?$$

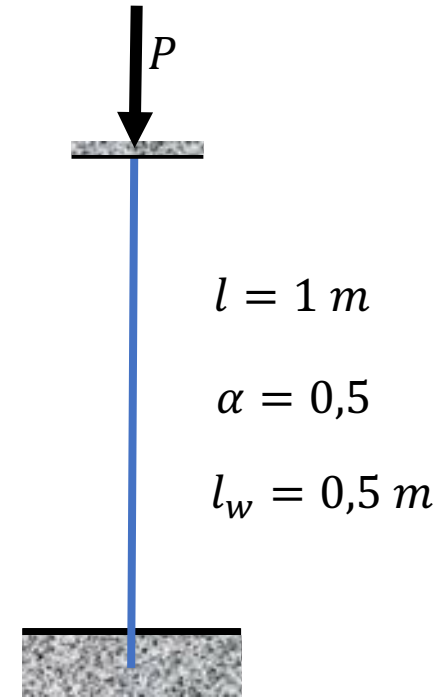
$$J_z = \frac{bh^3}{12} = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_y = J_{min} = \frac{hb^3}{12} = 1,35 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$A = hb = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = 8,66 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 100,6$$

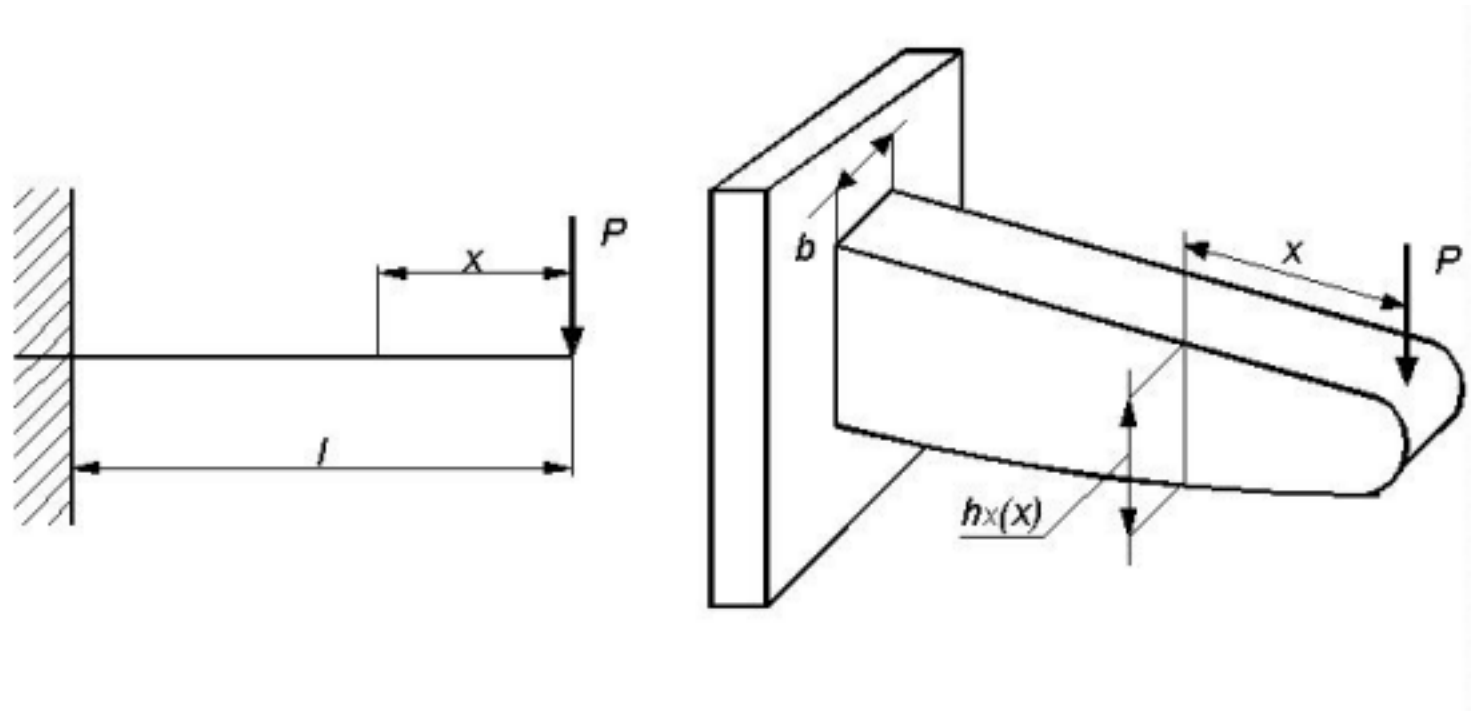


$$\lambda = \frac{l_w}{r} = 57,8 < \lambda_{gr} = 100,6$$

$$\sigma_{kryt}^{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}} \lambda = 206,4 \text{ MPa}$$

$$P_{kryt}^{T-J} = A \sigma_{kryt}^{T-J} = 371,5 \text{ kN} > AR_c = 351 \text{ kN}$$

OBLICZENIA WYTRZYMAŁOŚCIOWE



Powodem, dla którego wykonuje się obliczenia wytrzymałościowe, jest konieczność uzyskania odpowiedzi na następujące pytania:

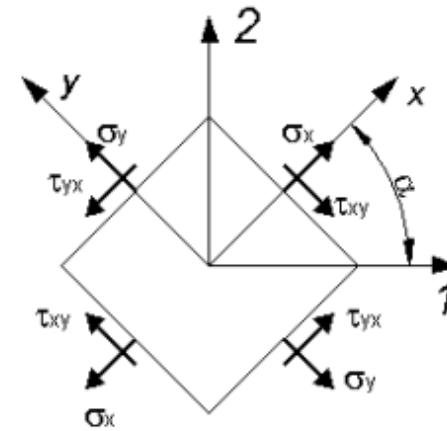
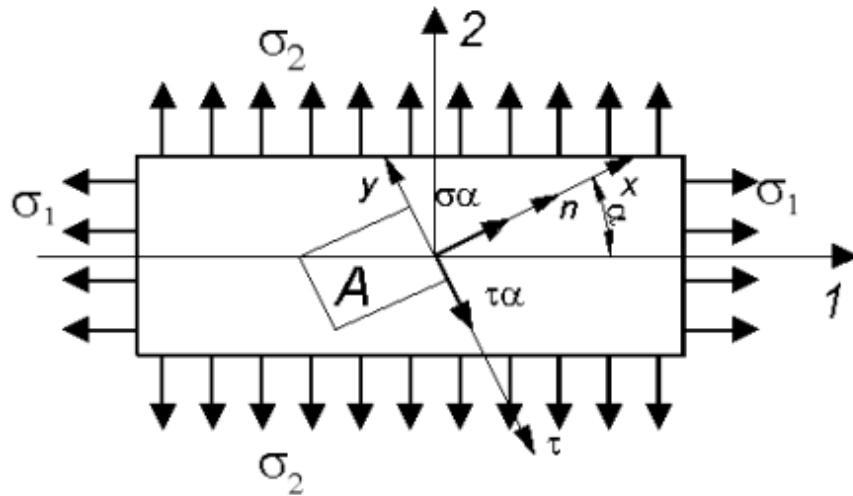
Jaki jest stopień pewności, że konstrukcja o określonej strukturze i wymiarach, zbudowana z materiałów o znanych własnościach mechanicznych, poddana określonym obciążeniom nie ulegnie zniszczeniu?

Pytanie jest takie samo jak poprzednie, z tą różnicą, że nie są znane wymiary elementów. Tego typu obliczenia wykonywane są w trakcie projektowania konstrukcji, gdzie dobiera się wymiary konstrukcji tak, aby spełnić wymagane warunki wytrzymałościowe.

Obok obliczeń wytrzymałościowych wykonuje się **obliczenia sztywnościowe**, oraz **badanie stateczności**

Aby konstrukcja nie uległa zniszczeniu, w najbardziej zagrożonym punkcie jej materiału musi być spełniony warunek

$$\sigma < \sigma_{\text{nieb.}}$$



Współczynniki bezpieczeństwa

Obliczenia wytrzymałościowe (podobnie zresztą jak i obliczenia sztywnościowe i statecznościowe) muszą być wykonywane z pewnym zapasem bezpieczeństwa, ponieważ prawie wszystkie wartości danych wejściowych do obliczeń są obarczone błędami, inaczej mówiąc, wartości te nigdy nie są całkowicie pewne.



Brakiem pełnej pewności (czyli mające charakter losowy) są obarczone poniższe wielkości.

Dane o obciążeniach konstrukcji

Dane o mechanicznych własnościach materiałów zastosowanych w konstrukcji

Dane o wymiarach konstrukcji

Dane o zużyciu elementów konstrukcji



W celu zapewnienia odpowiedniego stopnia bezpieczeństwa konstrukcji stosuje się tzw. **współczynniki bezpieczeństwa n** w odniesieniu do mierników wyężenia materiału. Wprowadza się tzw. **dopuszczalne wartości naprężeń** w następujący sposób:

$$\sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{nieb}}}{n}$$

$$\sigma < \sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{nieb}}}{n}.$$

Jako niebezpieczne wartości przyjmuje się:

$$\sigma_{\text{nieb}} = \begin{cases} R_e & - \text{ dla ciał sprężysto-} \\ & \text{plastycznych} \\ R_m & - \text{ dla ciał kruchych} \\ & \text{przy rozciąganiu} \\ R_c & - \text{ dla ciał kruchych} \\ & \text{przy ściskaniu} \end{cases}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{nieb}}{\mathbf{n}} = \begin{cases} \mathbf{R}_e / \mathbf{n} & - & \text{dla ciał sprężysto-plastycznych} \\ \mathbf{R}_m / \mathbf{n} & - & \text{dla ciał kruchych przy rozciąganiu} \\ \mathbf{R}_c / \mathbf{n} & - & \text{dla ciał kruchych przy ściskaniu} \end{cases}$$

$$\sigma < \sigma_{dop} = \frac{\sigma_{nieb}}{\mathbf{n}} \cdot$$

Tablica 1.1. Wartości liczbowe cząstkowych współczynników bezpieczeństwa

Nazwa współczynnika	Wartości	Zastosowanie
n₁ pewności założeń	1,1	przeprowadzone badania wytrzymałościowe danego materiału i zastosowanie ścisłej metody obliczeń
	1,2+1,4	znany gatunek materiału oraz zwykłe metody obliczeń
	1,5+2,0	obciążenie uderne
n₂ ważności przedmiotu	1,0+1,1	gdy zniszczenie danej części: spowoduje zatrzymanie maszyny
	1,1+1,2	spowoduje uszkodzenie maszyny
	1,3+1,5	może spowodować wypadek
n₃ jednorodności materiału	1,0+1,05	ściśła kontrola jednorodności po obróbce plastycznej (metodami rentgenograficznymi, ultradźwiękowymi itp.)
	1,1	materiały kute, walcowane, ciągnione
	1,2	odlewy ciśnieniowe, odśrodkowe
	1,3	odlewy kokilowe, starannie wykonane połączenia spawane (spawane automatycznie lub wykonane przez spawaczy I kategorii z kontrolą rentgenowską)
n₄ zachowania wymiarów	1,0+1,05	ściśła kontrola wymiarów każdego przedmiotu
	1,05+1,1	normalna kontrola metodą wrywkową po obróbce skrawaniem
	1,1+1,15	pręty, profile walcowane, blachy, dokładne odlewy, elementy tłoczone
	1,2	konstrukcje spawane, odlewy, odkuwki

$$n = n_1 n_2 n_3 n_4.$$

$$\sigma < \sigma_{dop} = \frac{\sigma_{nieb}}{n}.$$

$$\sigma_{nieb} = \begin{cases} R_e & - \text{ dla ciał sprężysto-} \\ & - \text{ plastycznych} \\ R_m & - \text{ dla ciał kruchych} \\ & - \text{ przy rozciąganiu} \\ R_c & - \text{ dla ciał kruchych} \\ & - \text{ przy ściskaniu} \end{cases}$$

Tablica 1.1. Wartości liczbowe cząstkowych współczynników bezpieczeństwa

Nazwa współczynnika	Wartości	Zastosowanie
n₁ pewności założeń	1,1	przeprowadzone badania wytrzymałościowe danego materiału i zastosowanie ściślejszej metody obliczeń
	1,2+1,4	znany gatunek materiału oraz zwykłe metody obliczeń
	1,5+2,0	obciążenie udarne
n₂ ważności przedmiotu	1,0+1,1	gdy zniszczenie danej części: spowoduje zatrzymanie maszyny
	1,1+1,2	spowoduje uszkodzenie maszyny
	1,3+1,5	może spowodować wypadek
n₃ jednorodności materiału	1,0+1,05	ściśła kontrola jednorodności po obróbce plastycznej (metodami rentgenograficznymi, ultradźwiękowymi itp.)
	1,1	materiały kute, walcowane, ciągnione
	1,2	odlewy ciśnieniowe, odśrodkowe
	1,3	odlewy kokilowe, starannie wykonane połączenia spawane (spawane automatycznie lub wykonane przez spawaczy I kategorii z kontrolą rentgenowską)
	1,4+1,7	odlewy piaskowe, części hartowane, połączenia spawane o prawidłowym wyglądzie zewnętrznym
n₄ zachowania wymiarów	1,0+1,05	ściśła kontrola wymiarów każdego przedmiotu
	1,05+1,1	normalna kontrola metodą wrywkową po obróbce skrawaniem
	1,1+1,15	pręty, profile walcowane, blachy, dokładne odlewy, elementy tłoczone
	1,2	konstrukcje spawane, odlewy, odkuwki

$$n = n_1 n_2 n_3 n_4.$$

$$1,10 = 1,1 \times 1,0 \times 1,0 \times 1,0$$

$$1,33 = 1,1 \times 1,1 \times 1,05 \times 1,05$$

$$2,40 = 1,4 \times 1,2 \times 1,3 \times 1,1$$

$$6,12 = 2,0 \times 1,5 \times 1,7 \times 1,2$$

$$\sigma < \sigma_{dop} = \frac{\sigma_{nieb}}{n}.$$

Dla bardziej złożonych przypadków przebiegu naprężeń, niż ma to miejsce w walcowym pręcie rozciągany, nie wykonuje się eksperymentalnych prób wytrzymałościowych. Wyznacza się jedno naprężenie

tzw. **naprężenie zredukowane** – σ_{red}

które jest miernikiem wyczerpania materiału w analogiczny sposób jak w przypadku pręta osiowo obciążonego.

Tresci; τ_{max} :

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min}$$

Hubera:

$$\sigma_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - naprężenia główne

$$\sigma_{min} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma_{max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$





Henri Édouard Tresca

(1814 - 1885)

Francuski inżynier, profesor paryskiego Conservatoire National des Arts et Métiers.

Na podstawie doświadczeń Charles'a Coulomba sformułował hipotezę wytrzymałościową (nazywaną hipotezą Coulomba-Treski), w której jako kryterium wyężenia podał wartość maksymalnego naprężenia ścinającego.

HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE



Maksymilian Tytus Huber

1872 - 1950

Ukończył studia na Wydziale Inżynierii Lwowskiej Szkoły Politechnicznej w 1895.

Odbył roczne studia uzupełniające na Uniwersytecie w Berlinie..
Od 1908 był profesorem Politechniki Lwowskiej. Był jej rektorem dwukrotnie.

W 1928 opuścił Lwów i zamieszkał w Warszawie. Pracował jako kierownik Katedry Mechaniki Politechniki Warszawskiej.

W 1945 zamieszkał w Gdańsku i organizował Politechnikę Gdańską.

W 1949 zamieszkał w Krakowie i pełnił funkcję kierownika Katedry Wyższych Zagadnień Mechaniki w AGH.

Hipotezę wytrzymałościową (nazywaną hipotezą Hubera), w której jako kryterium wyczerpania przyjął wartość energii odkształcenia postaciowego opublikował w pracy:

Właściwa praca odkształcenia jako miara wyczerpania materiału,
Towarzystwo Politechniczne, Lwów, 1904

Zjawiska wpływające na wytrzymałość

Spiętrzenie naprężeń

Już w najprostszym rodzaju konstrukcji, jakim jest osiowo obciążony pręt,

wzór $\sigma_x = \frac{N_x}{A}$ na obliczanie naprężeń normalnych w poprzecznych przekrojach pręta może nie być słuszny. O wartości tych naprężeń może decydować charakter zmian kształtu pręta w sąsiedztwie przekroju, w którym są te naprężenia obliczane.

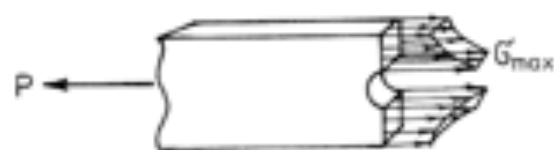
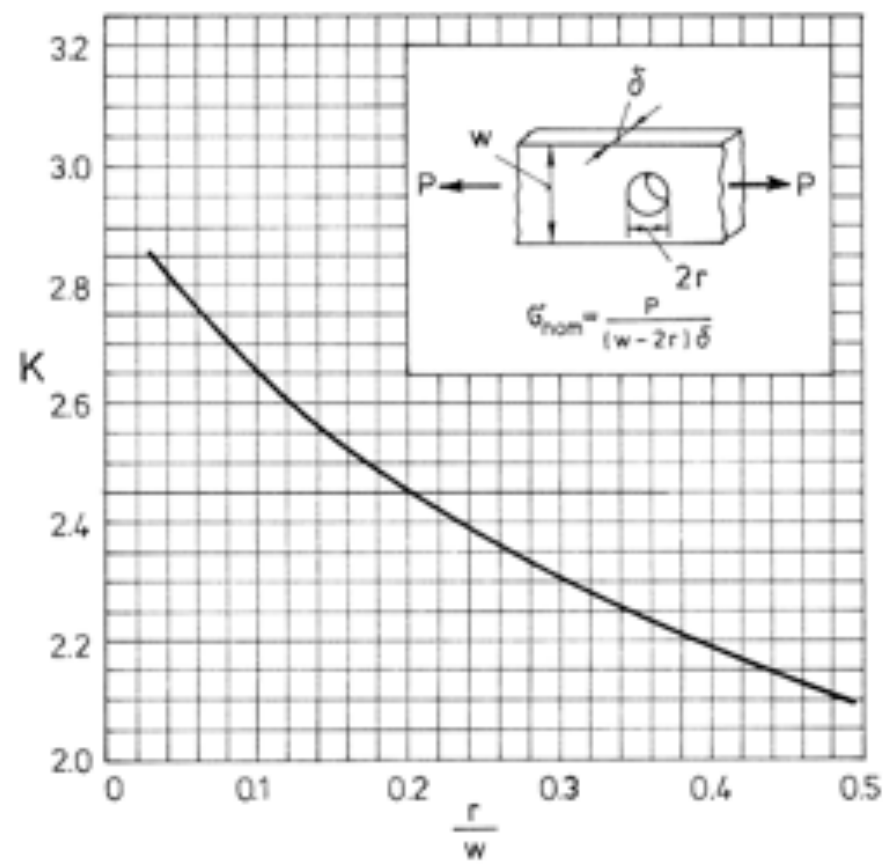
Gwałtowna zmiana pola przekroju pręta może mieć niepomijalny wpływ na wartość maksymalnych naprężeń normalnych, które mogą być znacznie większe od naprężeń obliczanych za pomocą tego wzoru.

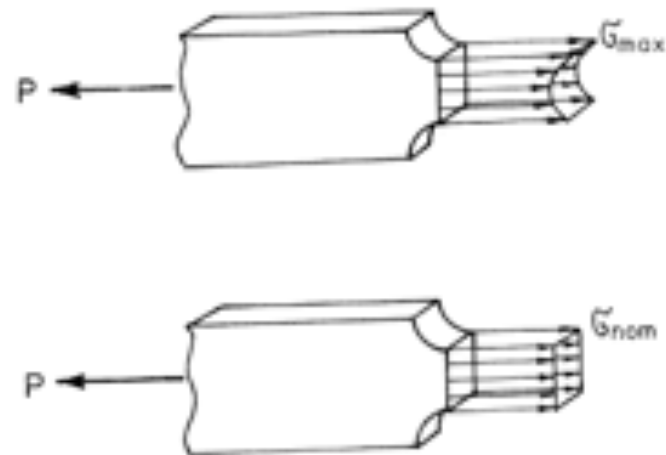
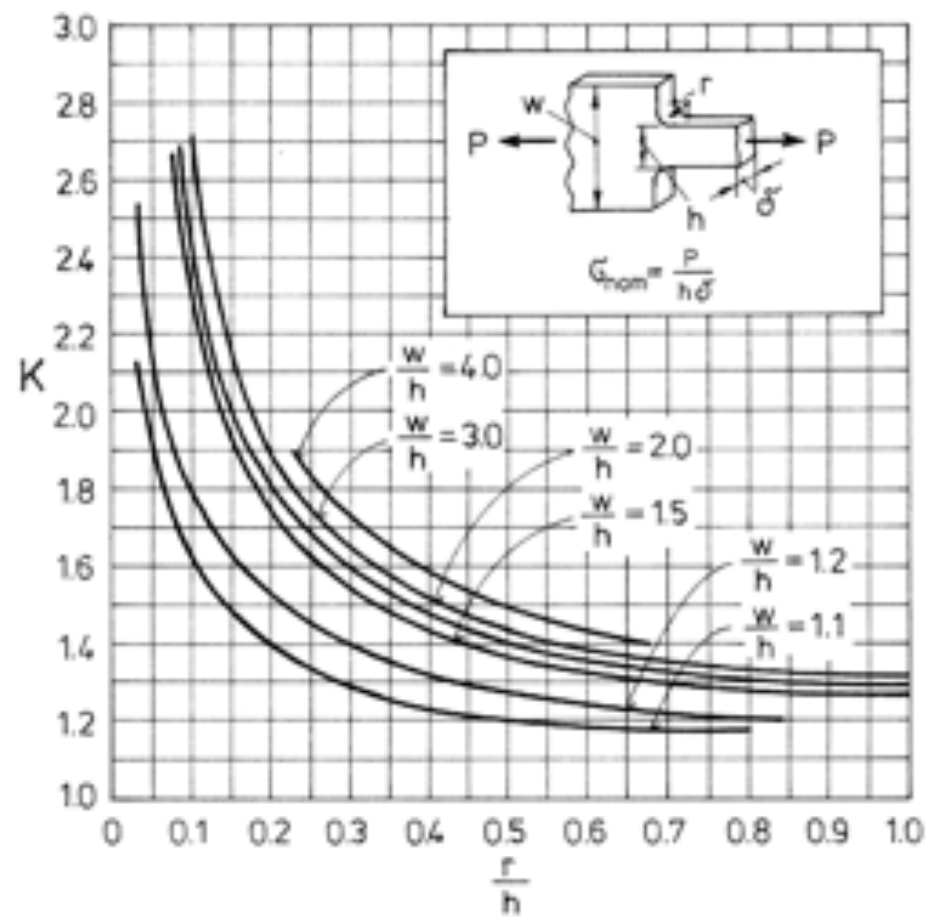
W takiej sytuacji naprężenia te będziemy nazywać **naprężeniami nominalnymi**

$$\sigma_{x \text{ nom}} = \frac{N_x}{A} \cdot$$

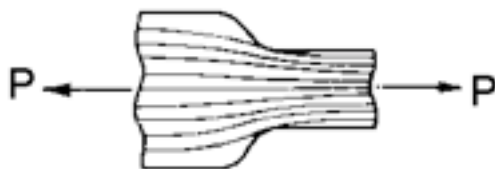
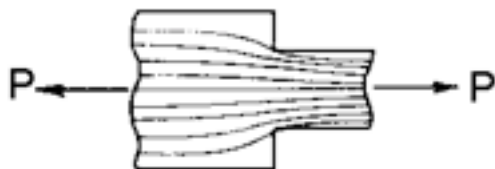
Na rysunku przedstawiono (w formie wykresów) przebieg współczynników spiętrzenia naprężeń zdefiniowanych jako

$$K = \frac{\sigma_{x \text{ max}}}{\sigma_{x \text{ nom}}} \cdot$$



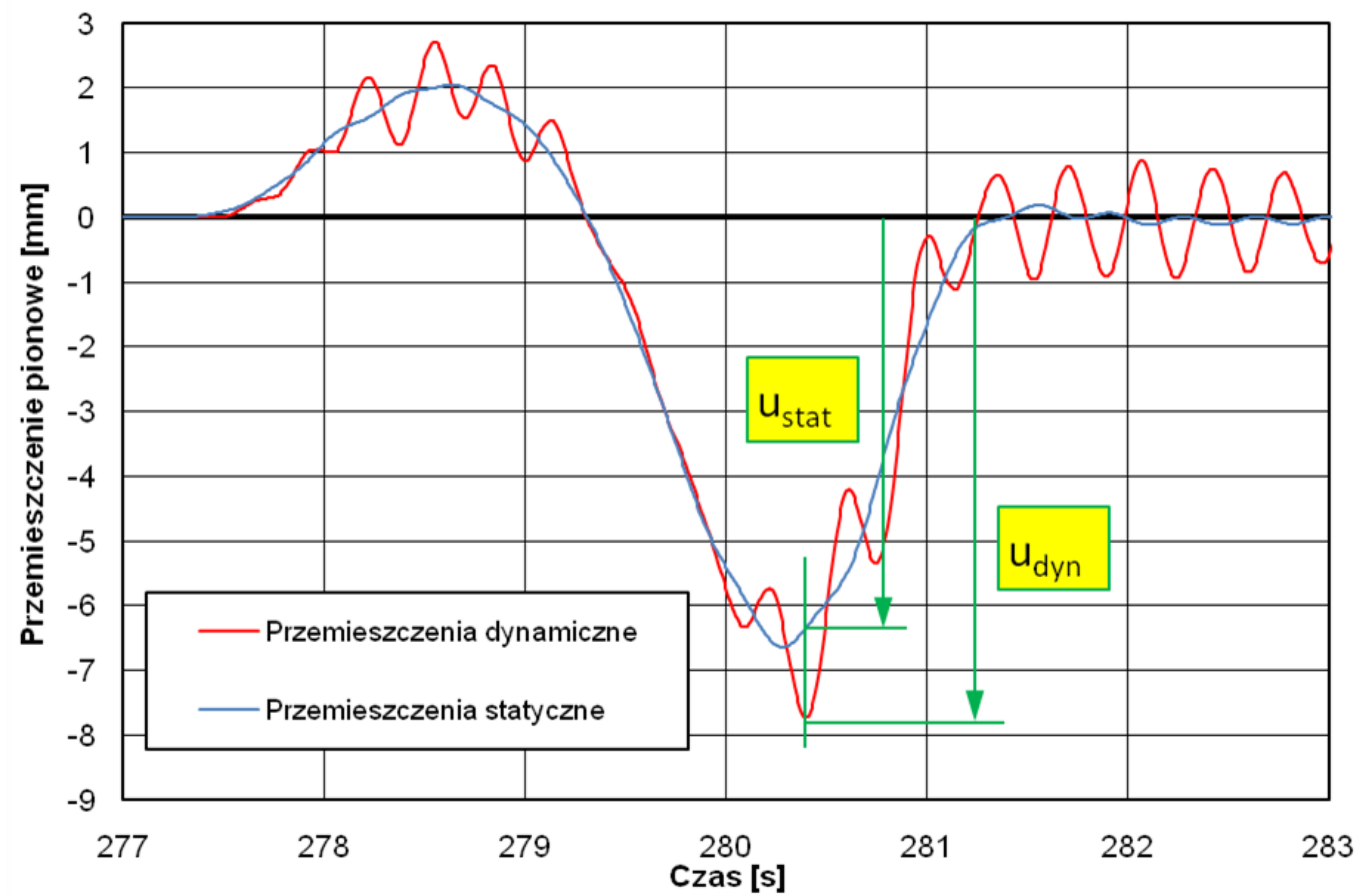


Niekorzystny **wpływ działania karbu** można osłabić, wprowadzając odpowiednie korekty w przebiegu zmian poprzecznych przekrojów – zmniejszając gwałtowności tych zmian. Zabieg taki nazywany jest „odciążeniem karbów”.



Obciążenia dynamiczne

Należy pamiętać, że konstrukcje podlegają obciążeniom nie tylko stałym w czasie (statycznym), ale również obciążeniom zmiennym w czasie (nazywanym **obciążeniami dynamicznymi**).



Wytrzymałość zmęczeniowa

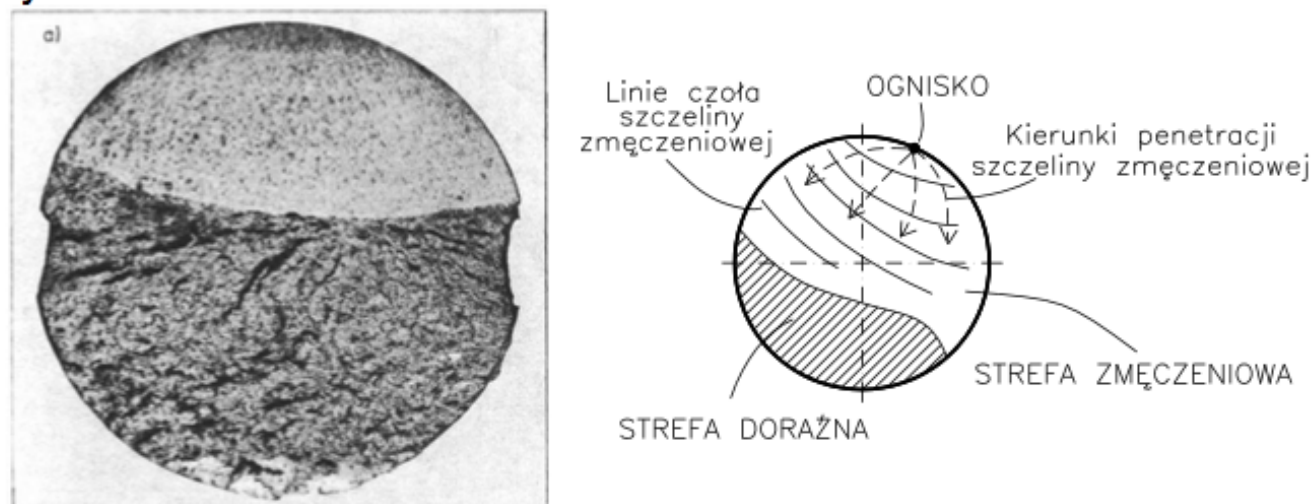
Długotrwałe obciążenia, cyklicznie zmieniające się w czasie, powodują dodatkowe efekty osłabiające wytrzymałość konstrukcji, zwane **zmęczeniem materiału** konstrukcji.



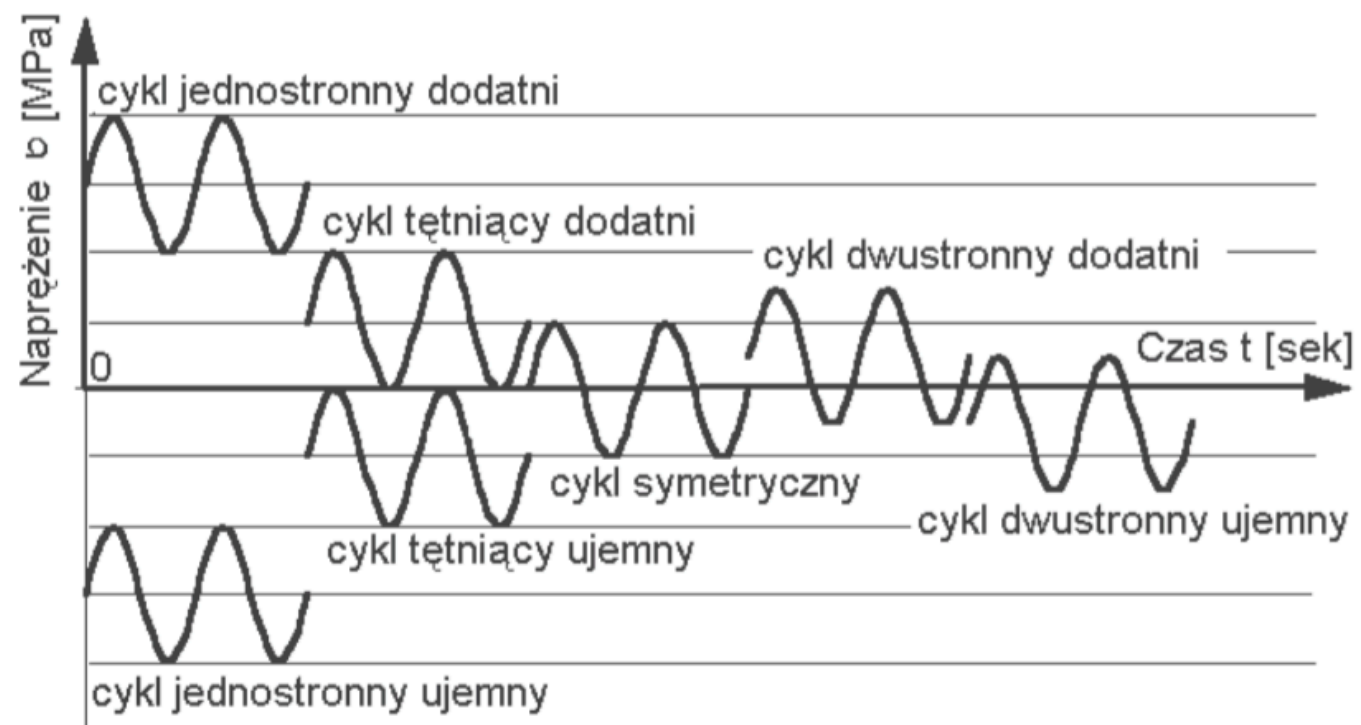
Zmęczenie materiału jest związane ze zmniejszeniem wytrzymałości elementów konstrukcyjnych poddanych działaniu okresowo zmiennych obciążeń. Zjawisko zmęczenia materiałów jest bardzo niebezpieczne, ponieważ zniszczenie elementu konstrukcyjnego lub części maszyny następuje nieoczekiwanie przy naprężeniach znacznie mniejszych od wytrzymałości doraźnej, wyznaczonej ze statycznej próby rozciągania. Zniszczenie następuje bez żadnych dostrzegalnych wcześniej odkształceń plastycznych.

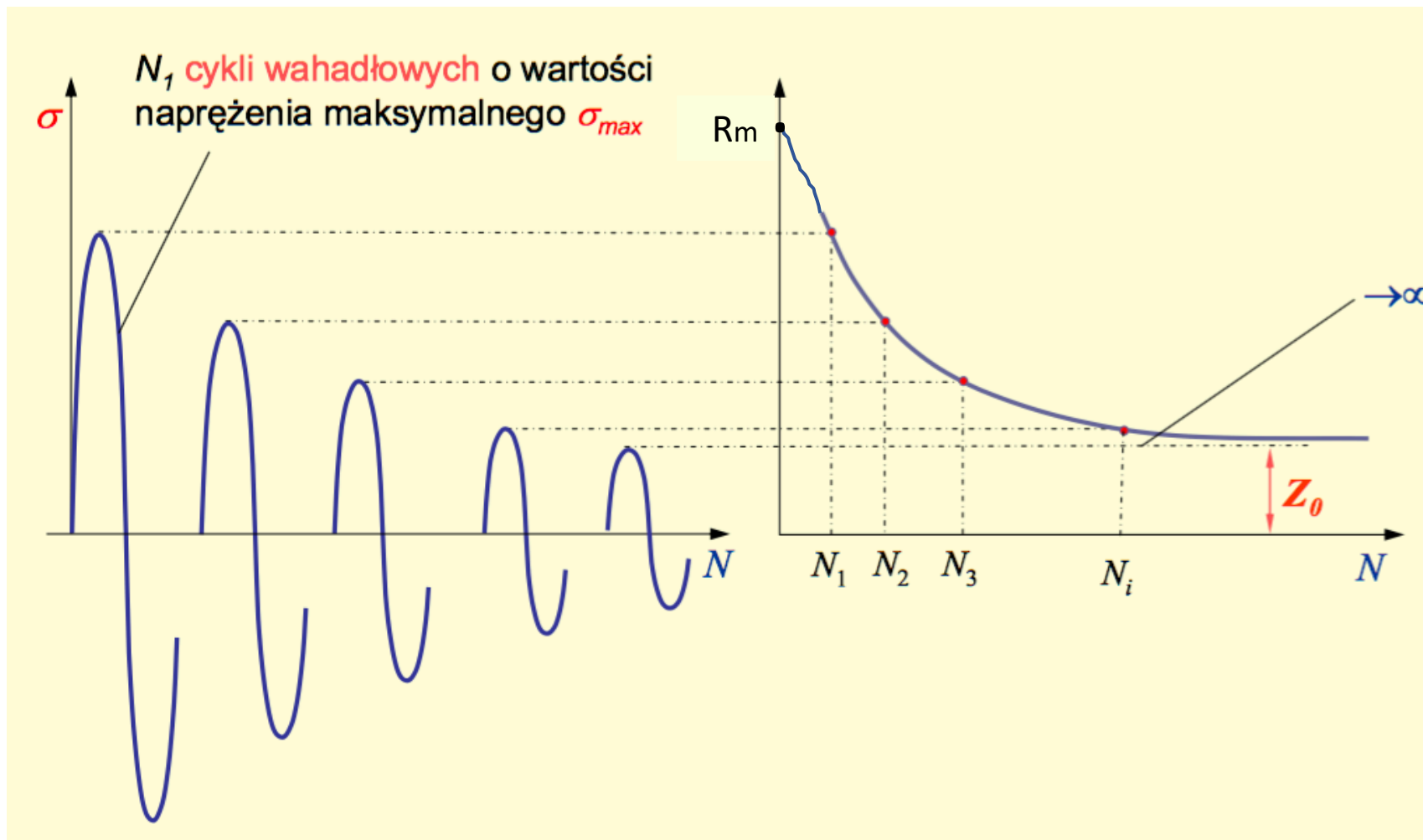


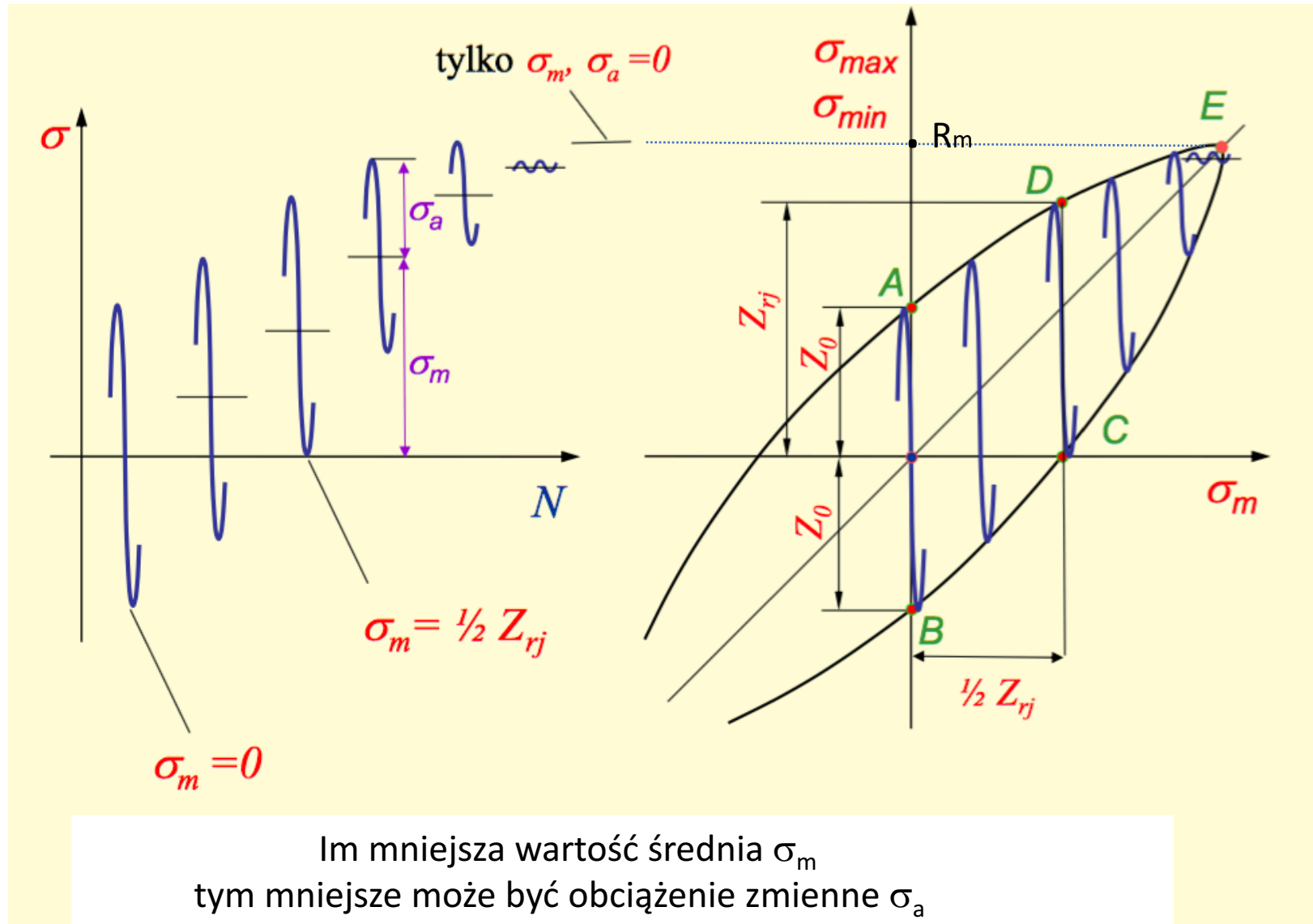
Przyczyną zmęczeniowego zniszczenia materiału jest zmienny stan naprężenia. Przebieg zniszczenia można prześledzić na przykładzie przelomu okrągłej próbki (np. osi wagonu kolejowego) przedstawionej na rysunku.



Początek zniszczenia wału nastąpił w tzw. **ognisku**. Przyczyną zapoczątkowania procesu zmęczeniowego jest spiętrzenie naprężeń wywołane np. pęknięciem, rysą, wadą materiałową, karbem. Szczelina zmęczeniowa rozszerza się, penetruje w głąb przekroju – następuje tzw. **propagacja pęknięcia**. Wał ulega zniszczeniu, gdy niezniszczona część wału nie jest w stanie przenieść obciążenia. W przelomie zmęczeniowym różni się dwie strefy. Strefa zniszczenia zmęczeniowego ma wygładzoną, błyszczącą powierzchnię z charakterystycznymi liniami, w których propagacja pęknięcia została np. na skutek zmniejszenia obciążenia zahamowana. Wygładzenie tej strefy wynika z tarcia powierzchni w czasie pracy. Druga strefa nosi nazwę strefy doraźnej (reszkowej) i ma wygląd gruboziarnisty, matowy.





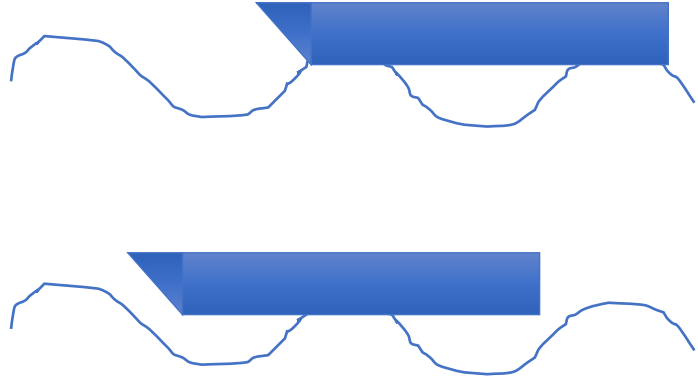




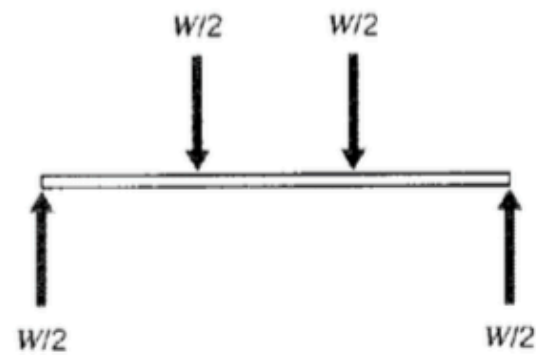
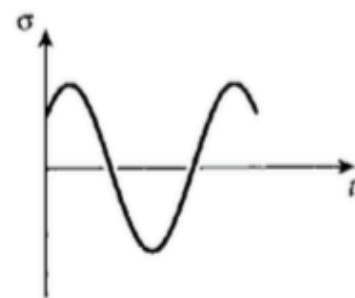
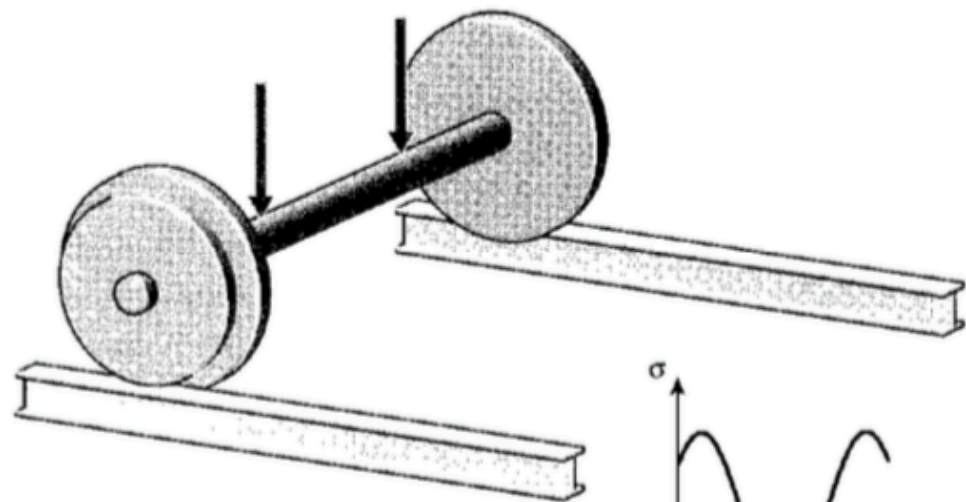
De Havilland Comet, pierwszy pasażerski samolot odrzutowy

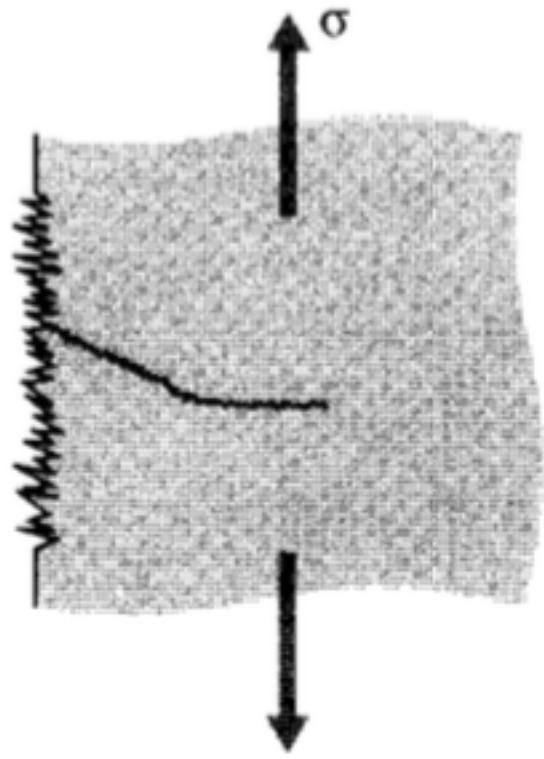


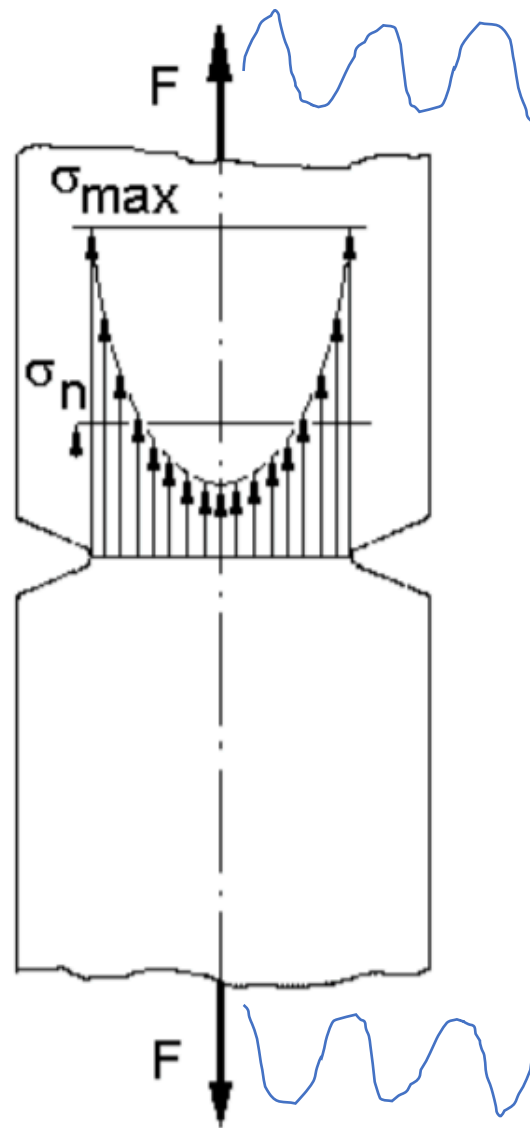
Seria katastrof: 3 marca 1953, 10 stycznia 1954, 8 kwietnia 1954







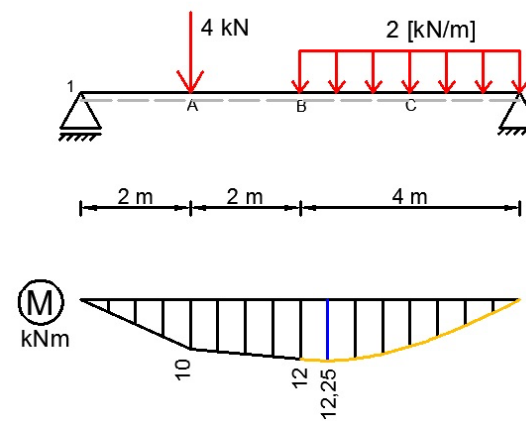
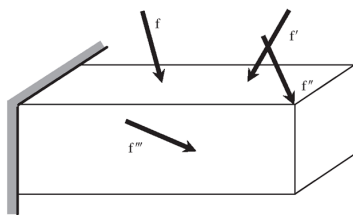




Metoda elementów skończonych

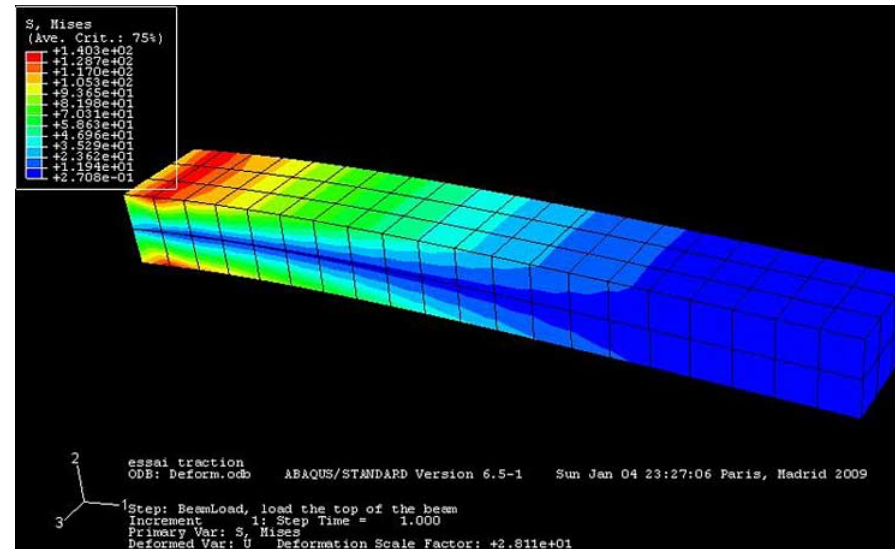
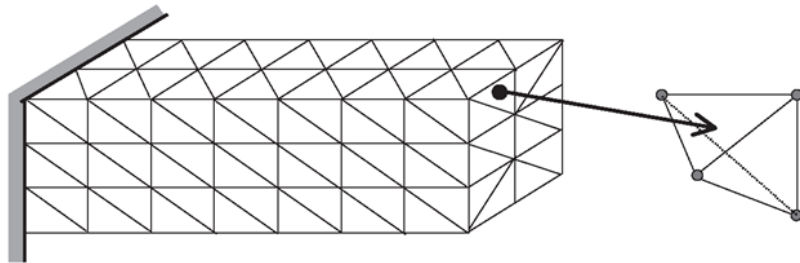
Metoda elementów skończonych (MES) w ostatnich latach stała się powszechnie stosowanym narzędziem w praktyce inżynierskiej. Jej błyskawiczny rozwój oraz dalsze perspektywy są związane bezpośrednio z rozwojem informatyki (w zakresie hardware i software, sprzętu i oprogramowania). Niewiele jest dziedzin techniki, w których rozwój informatyki miałby tak znaczący wpływ na metody obliczeń, jak w przypadku obliczeń wytrzymałościowych.

„Tradycyjna” wytrzymałość materiałów opiera się na ciągłym, jednorodnym modelu ciała sprężystego. Dla spotykanych w praktyce inżynierskiej zagadnień, polegających na wyznaczaniu naprężeń, przemieszczeń i innych wielkości (np. rozkładów temperatur), tylko w przypadku stosunkowo prostych modeli geometrycznych można otrzymać za pomocą metod analizy matematycznej (rachunek różniczkowy i całkowy) rozwiązania ścisłe, dokładne.



Metoda elementów skończonych polega na odejściu od ciągłego modelu konstrukcji na rzecz jej podziału na skończoną liczbę ściśle zdefiniowanych elementów – **elementów skończonych**. Podział konstrukcji na elementy nazywa się **dyskretyzacją konstrukcji**, która ciągły model obliczeniowy zastępuje pewną skończoną liczbą elementów. W konstrukcjach dużych, złożonych można wydzielić pewne powtarzalne grupy elementów, które definiuje się jako tzw. **superelementy**, złożone z kolei z pewnej liczby elementów.

Praktyczne stosowanie MES wymaga przede wszystkim dogłębnej znajomości wytrzymałości materiałów, jak również podstaw metod numerycznych i znajomości technik komputerowych.



Praktyczne stosowanie MES wymaga przede wszystkim dogłębnej znajomości wytrzymałości materiałów, jak również podstaw metod numerycznych i znajomości technik komputerowych. Jedną z najważniejszych czynności mających wpływ na końcowy wynik jest właściwy podział konstrukcji na odpowiednio dobrane elementy. Wymaga to umiejętności analizowania rozkładów naprężeń i przemieszczeń w konstrukcji oraz formułowania warunków brzegowych. Analiza otrzymanych wyników oraz wyciąganie właściwych wniosków również wymagają znajomości wytrzymałości materiałów. **Nieemożliwe jest traktowanie MES jako jednego z wielu narzędzi informatycznych, wymagającego jedynie znajomości posługiwania się komputerem.**

